

Lista 1 de FI-193

1. **Estados coerentes bosônicos:** Estados coerentes são auto-vetores dos operadores de aniquilação bosônicos (os operadores de criação não possuem auto-vetores). Suponha que haja apenas um estado em $\mathcal{H}$, α . Como a_α não é Hermitiano, seus auto-valores, se existirem, serão em geral complexos. Vamos chamá-los de ϕ e os auto-vetores correspondente de $|\phi\rangle$. Se $|n_\alpha\rangle$ é um estado simetrizado e normalizado com n_α bósons em α , podemos expandir

$$|\phi\rangle = \sum_{n_\alpha} \phi(n_\alpha) |n_\alpha\rangle.$$

- (a) Mostre que se $a_\alpha|\phi\rangle = \phi|\phi\rangle$ então (não normalizado)

$$\phi(n_\alpha) = \frac{\phi^{n_\alpha}}{\sqrt{n_\alpha!}}.$$

- (b) Mostre que $|\phi\rangle = e^{\phi a_\alpha^\dagger} |0\rangle$, onde $|0\rangle$ é o estado de vácuo.

- (c) Mostre que

$$\langle\phi|\phi'\rangle = e^{\phi^*\phi'}.$$

- (d) Mostre que a relação de completeza é

$$\hat{1} = \int \frac{d(\text{Re}(\phi))d(\text{Im}(\phi))}{\pi} e^{-\phi^*\phi} |\phi\rangle\langle\phi|.$$

- (e) Mostre que

$$\text{Tr}(A) \equiv \sum_{n_\alpha} \langle n_\alpha | A | n_\alpha \rangle = \int \frac{d(\text{Re}(\phi))d(\text{Im}(\phi))}{\pi} e^{-\phi^*\phi} \langle\phi|A|\phi\rangle.$$

- (f) Um operador $A(a_\alpha^\dagger, a_\alpha)$ é dito estar em *ordem normal* se todos os operadores de criação estão à esquerda de todos os operadores de aniquilação (Exemplo: $a_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger a_\alpha$). Se $A(a_\alpha^\dagger, a_\alpha)$ está em ordem normal, mostre que

$$\langle\phi|A(a_\alpha^\dagger, a_\alpha)|\phi\rangle = A(\phi^*, \phi)e^{\phi^*\phi}.$$

2. Encontre a forma diagonal do Hamiltoniano

$$H = E_0 a^\dagger a + F(a^\dagger + a),$$

através de uma transformação unitária

$$\begin{aligned} S &= i\lambda(a - a^\dagger), \\ H' &= e^{-iS} H e^{iS}, \end{aligned}$$

($\lambda \in \mathbb{R}$) seguindo os seguintes passos:

- (a) Ache H' usando a fórmula de Baker-Hausdorff

$$e^{-B} A e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A, B]_n = A + [A, B] + \frac{1}{2!} [[A, B], B] + \dots, \quad (1)$$

onde $[A, B]_n = [[A, B]_{n-1}, B]$ e $[A, B]_0 = A$.

- (b) Encontre o valor de λ que deixa H' na forma diagonal.

- (c) Mostre que se $|\phi'_n\rangle$ é auto-estado de H' com auto-valor E_n , então $|\phi_n\rangle = e^{iS}|\phi'_n\rangle$ é auto-estado de H com o **mesmo** auto-valor. A partir disso, mostre que o estado fundamental de H é um estado coerente. A seguinte identidade será útil: se $C \equiv [A, B]$ e $[A, C] = [B, C] = 0$, então $e^{A+B} = e^A e^B e^{-C/2}$.

3. Encontre a forma diagonal do seguinte Hamiltoniano

$$H = E_0 a^\dagger a + E_1 (a^\dagger a^\dagger + aa),$$

onde E_0 e E_1 são constantes e a e $a^\dagger$ são operadores de criação e destruição bosônicos. Mostre também que o estado fundamental de H pode ser escrito como $e^{\alpha a^\dagger a^\dagger} |0\rangle$, onde $|0\rangle$ é o “estado de vácuo” de a , ou seja, $a|0\rangle = 0$. O estado fundamental pode ser visto com um estado coerente de pares.

4. *Transformação de Bogoliubov fermiônica:* Considere dois estados $|a\rangle$ e $|b\rangle$, cujos operadores de aniquilação **fermiônicos** são a, b .

(i) Mostre que a transformação

$$\begin{aligned} c &= ua + vb^\dagger \\ d^\dagger &= -va + ub^\dagger \end{aligned}$$

$(u, v \in \mathbb{R})$ preserva todas as regras de anti-comutação para os novos operadores se $u^2 + v^2 = 1$.

(ii) Obtenha a transformação inversa e use-a para diagonalizar o Hamiltoniano

$$H = \epsilon (a^\dagger a + b^\dagger b) + \Delta (a^\dagger b^\dagger + ba).$$

(iii) Considere agora a seguinte notação compacta (notação de Nambu-Gorkov) em termos de vetores e matrizes

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{pmatrix} c \\ d^\dagger \end{pmatrix}, \\ \Phi &= \begin{pmatrix} a \\ b^\dagger \end{pmatrix}, \\ \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}, \\ \Psi &= \mathbf{U}\Phi, \end{aligned}$$

onde a última equação deve ser entendida como multiplicação de matrizes. Mostre que:

(a) A transformação inversa é gerada por $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger$. A matriz $\mathbf{U}$ é, portanto, unitária.

(b) Mostre que

$$H = \Phi^\dagger \mathbf{h} \Phi + \epsilon,$$

onde usamos o vetor-linha

$$\Phi^\dagger = (a^\dagger \ b),$$

$$\mathbf{h} = \epsilon \tau_3 + \Delta \tau_1,$$

e τ_i ($i = 1, 2, 3$) são as matrizes de Pauli.

(c) Use a transformação $\mathbf{U}$ para chegar à forma diagonal de H obtida em (ii). Nessa notação, a transformação de Bogoliubov pode ser vista como uma “rotação” no “espaço de Nambu-Gorkov”.

5. *Transformação de Bogoliubov bosônica:* Considere dois estados $|a\rangle$ e $|b\rangle$, cujos operadores de aniquilação **bosônicos** são a, b .

(i) Mostre que a transformação

$$\begin{aligned} c &= ua + vb^\dagger \\ d^\dagger &= va + ub^\dagger \end{aligned}$$

$(u, v \in \mathbb{R})$ preserva todas as regras de comutação para os novos operadores se $u^2 - v^2 = 1$. Note a mudança de sinal na segunda equação em relação ao caso fermiônico.

(ii) Obtenha a transformação inversa e use-a para diagonalizar o Hamiltoniano

$$H = \epsilon (a^\dagger a + b^\dagger b) + \Delta (a^\dagger b^\dagger + ba).$$

(iii) Discuta o que acontece se $\Delta \geq \epsilon$.