

FI-193 – Lista 1

Soluções

Questão 1 — Estados coerentes bosônicos

Um único modo α , com $[a, a^\dagger] = 1$, $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. Seguimos a convenção do enunciado: os estados coerentes $|\phi\rangle = \sum_n \phi(n)|n\rangle$ são *não normalizados*, com $\phi(0) = 1$.

a) Coeficientes da expansão

Impondo $a|\phi\rangle = \phi|\phi\rangle$:

$$a|\phi\rangle = \sum_{n \geq 1} \phi(n)\sqrt{n}|n-1\rangle = \sum_{n \geq 0} \phi(n+1)\sqrt{n+1}|n\rangle \stackrel{!}{=} \sum_{n \geq 0} \phi\phi(n)|n\rangle.$$

Igualando os coeficientes de $|n\rangle$ (base ortonormal), obtemos a recorrência

$$\phi(n+1) = \frac{\phi}{\sqrt{n+1}}\phi(n) \implies \phi(n) = \frac{\phi^n}{\sqrt{n!}}\phi(0) = \frac{\phi^n}{\sqrt{n!}},$$

com a escolha $\phi(0) = 1$. Note que a recorrência tem solução para *qualquer* $\phi \in \mathbb{C}$: todo complexo é autovalor de a . (Para $a^\dagger$ a recorrência análoga correria “para baixo” e forçaria todos os coeficientes a zero — por isso $a^\dagger$ não tem autovetores.) $\square$

b) $|\phi\rangle = e^{\phi a^\dagger}|0\rangle$

Como $(a^\dagger)^n|0\rangle = \sqrt{n!}|n\rangle$,

$$e^{\phi a^\dagger}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} (a^\dagger)^n|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} \sqrt{n!}|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = |\phi\rangle. \quad \square$$

c) Produto escalar

Pela ortonormalidade dos $|n\rangle$,

$$\langle\phi|\phi'\rangle = \sum_{n,m} \frac{(\phi^*)^n (\phi')^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n|m\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\phi^*\phi')^n}{n!} = e^{\phi^*\phi'}. \quad \square$$

Em particular $\langle\phi|\phi\rangle = e^{|\phi|^2}$ (daí o fator $e^{-\phi^*\phi}$ nas fórmulas seguintes).

d) Relação de completeza

Escreva $\phi = re^{i\theta}$, $d(\text{Re } \phi) d(\text{Im } \phi) = r dr d\theta$. Então

$$\int \frac{d(\text{Re } \phi) d(\text{Im } \phi)}{\pi} e^{-\phi^* \phi} |\phi\rangle\langle\phi| = \sum_{n,m} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} r e^{-r^2} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}.$$

A integral angular dá $2\pi \delta_{nm}$; sobra

$$\sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} 2 \int_0^\infty dr r^{2n+1} e^{-r^2} = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \Gamma(n+1) = \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1},$$

onde usamos $2 \int_0^\infty r^{2n+1} e^{-r^2} dr = \int_0^\infty s^n e^{-s} ds = n!$ (com $s = r^2$). □

e) Traço

Inserindo o resultado de (d) dentro do traço (ou calculando diretamente):

$$\begin{aligned} \int \frac{d(\text{Re } \phi) d(\text{Im } \phi)}{\pi} e^{-\phi^* \phi} \langle\phi|A|\phi\rangle &= \sum_{n,m} \langle n|A|m\rangle \int \frac{d(\text{Re } \phi) d(\text{Im } \phi)}{\pi} e^{-\phi^* \phi} \frac{(\phi^*)^n \phi^m}{\sqrt{n!m!}} \\ &= \sum_{n,m} \langle n|A|m\rangle \delta_{nm} = \sum_n \langle n|A|n\rangle = \text{Tr } A, \end{aligned}$$

onde a integral é a mesma do item (d) (vale δ_{nm} após dividir por $\sqrt{n!m!}$). □

f) Operadores em ordem normal

Basta considerar um monômio em ordem normal, $(a^\dagger)^m a^n$; o caso geral segue por linearidade. Como $a|\phi\rangle = \phi|\phi\rangle$ e, tomando o adjunto, $\langle\phi|a^\dagger = \phi^*\langle\phi|$:

$$\langle\phi|(a^\dagger)^m a^n|\phi\rangle = (\phi^*)^m \phi^n \langle\phi|\phi\rangle = (\phi^*)^m \phi^n e^{\phi^* \phi}.$$

Logo, para $A(a^\dagger, a)$ em ordem normal, $\langle\phi|A(a^\dagger, a)|\phi\rangle = A(\phi^*, \phi) e^{\phi^* \phi}$. □

Questão 2 — Diagonalização por deslocamento

$H = E_0 a^\dagger a + F(a^\dagger + a)$, com $S = i\lambda(a - a^\dagger)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e $H' = e^{-iS} H e^{iS}$.

a) H' via Baker–Hausdorff

Aqui $iS = -\lambda(a - a^\dagger) = \lambda(a^\dagger - a)$, de modo que $e^{iS} = e^{\lambda(a^\dagger - a)}$ é o operador de deslocamento. Com $B = iS$ na fórmula (1):

$$[a, B] = \lambda[a, a^\dagger - a] = \lambda, \quad [a^\dagger, B] = \lambda[a^\dagger, a^\dagger - a] = \lambda,$$

e todos os comutadores seguintes se anulam (são comutadores com um c -número). A série trunca:

$$e^{-iS} a e^{iS} = a + \lambda, \quad e^{-iS} a^\dagger e^{iS} = a^\dagger + \lambda.$$

Como a transformação é um homomorfismo ($e^{-iS} XY e^{iS} = (e^{-iS} X e^{iS})(e^{-iS} Y e^{iS})$),

$$\begin{aligned} H' &= E_0 (a^\dagger + \lambda)(a + \lambda) + F(a^\dagger + a + 2\lambda) \\ &= E_0 a^\dagger a + (E_0 \lambda + F)(a^\dagger + a) + E_0 \lambda^2 + 2F\lambda. \end{aligned}$$

b) Escolha de λ

O termo linear desaparece para

$$\boxed{\lambda = -\frac{F}{E_0}} \quad \Longrightarrow \quad H' = E_0 a^\dagger a - \frac{F^2}{E_0},$$

que é diagonal na base de número, com espectro $E_n = nE_0 - F^2/E_0$.

c) O estado fundamental de H é coerente

Se $H' |\phi'_n\rangle = E_n |\phi'_n\rangle$, então, como $H = e^{iS} H' e^{-iS}$,

$$H(e^{iS} |\phi'_n\rangle) = e^{iS} H' |\phi'_n\rangle = E_n (e^{iS} |\phi'_n\rangle),$$

isto é, $|\phi_n\rangle = e^{iS} |\phi'_n\rangle$ é autoestado de H com o *mesmo* autovalor. □

O estado fundamental de H' é o vácuo $|0\rangle$; logo o de H é

$$|\phi_0\rangle = e^{iS} |0\rangle = e^{\lambda(a^\dagger - a)} |0\rangle.$$

Com $A = \lambda a^\dagger$, $B = -\lambda a$, temos $C = [A, B] = \lambda^2$ (c -número, comuta com tudo), e a identidade dada fornece

$$e^{\lambda(a^\dagger - a)} = e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda a} e^{-\lambda^2/2} \quad \Longrightarrow \quad |\phi_0\rangle = e^{-\lambda^2/2} e^{\lambda a^\dagger} \underbrace{e^{-\lambda a} |0\rangle}_{=|0\rangle} = e^{-\lambda^2/2} e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle.$$

Pela Questão 1(b), $e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle$ é exatamente o estado coerente de autovalor λ :

$$a |\phi_0\rangle = \lambda |\phi_0\rangle, \quad \lambda = -\frac{F}{E_0}.$$

O estado fundamental é o estado coerente “deslocado” que minimiza a energia clássica $E_0 |\phi|^2 + 2F \operatorname{Re} \phi$. □

Questão 3 — Bogoliubov de um modo e coerente de pares

$$H = E_0 a^\dagger a + E_1 (a^\dagger a^\dagger + aa), \quad [a, a^\dagger] = 1.$$

Diagonalização

Introduza a transformação de Bogoliubov de um modo,

$$a = u c + v c^\dagger, \quad a^\dagger = u c^\dagger + v c, \quad u = \cosh \theta, \quad v = \sinh \theta \quad (u^2 - v^2 = 1),$$

que preserva $[c, c^\dagger] = 1$. Substituindo:

$$\begin{aligned} a^\dagger a &= (u c^\dagger + v c)(u c + v c^\dagger) = (u^2 + v^2) c^\dagger c + uv (c^\dagger c^\dagger + cc) + v^2, \\ a^\dagger a^\dagger + aa &= (u^2 + v^2)(c^\dagger c^\dagger + cc) + 4uv c^\dagger c + 2uv. \end{aligned}$$

Logo

$$H = [E_0(u^2 + v^2) + 4E_1 uv] c^\dagger c + [E_0 uv + E_1(u^2 + v^2)](c^\dagger c^\dagger + cc) + E_0 v^2 + 2E_1 uv.$$

O termo anômalo é eliminado impondo

$$E_0 uv + E_1(u^2 + v^2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tanh 2\theta = -\frac{2E_1}{E_0},$$

(usando $u^2 + v^2 = \cosh 2\theta$, $2uv = \sinh 2\theta$), possível se $|2E_1| < E_0$. Com essa escolha, e definindo

$$\omega \equiv \sqrt{E_0^2 - 4E_1^2}, \quad \cosh 2\theta = \frac{E_0}{\omega}, \quad \sinh 2\theta = -\frac{2E_1}{\omega},$$

o coeficiente de $c^\dagger c$ fica $E_0 \cosh 2\theta + 2E_1 \sinh 2\theta = (E_0^2 - 4E_1^2)/\omega = \omega$, e o termo constante fica

$$E_0 v^2 + 2E_1 uv = \frac{E_0(\cosh 2\theta - 1)}{2} + E_1 \sinh 2\theta = \frac{\omega - E_0}{2}.$$

Portanto

$$H = \omega c^\dagger c + \frac{\omega - E_0}{2}, \quad \omega = \sqrt{E_0^2 - 4E_1^2}$$

Estado fundamental como coerente de pares

O estado fundamental $|\Omega\rangle$ é o vácuo de c : $c|\Omega\rangle = 0$, com $c = u a - v a^\dagger$ (transformação inversa). Proponha $|\Omega\rangle \propto e^{\alpha a^\dagger a^\dagger} |0\rangle$. Usando

$$[a, e^{\alpha a^\dagger a^\dagger}] = 2\alpha a^\dagger e^{\alpha a^\dagger a^\dagger} \quad (\text{pois } [a, (a^\dagger)^{2k}] = 2k (a^\dagger)^{2k-1}),$$

temos $a e^{\alpha a^\dagger a^\dagger} |0\rangle = 2\alpha a^\dagger e^{\alpha a^\dagger a^\dagger} |0\rangle$, e portanto

$$c e^{\alpha a^\dagger a^\dagger} |0\rangle = (u a - v a^\dagger) e^{\alpha a^\dagger a^\dagger} |0\rangle = (2\alpha u - v) a^\dagger e^{\alpha a^\dagger a^\dagger} |0\rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{v}{2u} = \frac{\tanh \theta}{2}.$$

Logo

$$|\Omega\rangle \propto e^{\alpha a^\dagger a^\dagger} |0\rangle, \quad \alpha = \frac{1}{2} \tanh \theta$$

— uma superposição de estados com $0, 2, 4, \dots$ bósons: o análogo, para *pares*, do estado coerente da Questão 1 (autovetor do operador que aniquila quasipartículas, construído exponenciando o criador de pares). $\square$

Questão 4 — Transformação de Bogoliubov fermiônica

Férmions: $\{a, a^\dagger\} = \{b, b^\dagger\} = 1$, todas as demais anticomutações nulas.

(i) Preservação da álgebra

Com $c = u a + v b^\dagger$ e $d^\dagger = -v a + u b^\dagger$ ($u, v \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}\{c, c^\dagger\} &= u^2 \{a, a^\dagger\} + v^2 \{b^\dagger, b\} = u^2 + v^2, \\ \{d, d^\dagger\} &= v^2 \{a^\dagger, a\} + u^2 \{b, b^\dagger\} = u^2 + v^2, \\ \{c, d^\dagger\} &= \{ua + vb^\dagger, -va + ub^\dagger\} = -uv\{a, a\} + uv\{b^\dagger, b^\dagger\} + u^2\{a, b^\dagger\} - v^2\{b^\dagger, a\} = 0, \\ \{c, d\} &= \{ua + vb^\dagger, -va^\dagger + ub\} = -uv + uv = 0.\end{aligned}$$

Todas as regras canônicas são preservadas se, e somente se, $u^2 + v^2 = 1$; parametrize $u = \cos \theta$, $v = \sin \theta$. $\square$

(ii) Inversa e diagonalização

A inversa (rotação por $-\theta$) é

$$a = u c - v d^\dagger, \quad b^\dagger = v c + u d^\dagger.$$

Substituindo em $H = \epsilon(a^\dagger a + b^\dagger b) + \Delta(a^\dagger b^\dagger + ba)$ e ordenando com as anticomutações ($dd^\dagger = 1 - d^\dagger d$, $cc^\dagger = 1 - c^\dagger c$, $dc = -cd$ etc.):

$$\begin{aligned}a^\dagger a &= (uc^\dagger - vd)(uc - vd^\dagger) = u^2 c^\dagger c + v^2 dd^\dagger - uv(c^\dagger d^\dagger + dc) \\ &= u^2 c^\dagger c - v^2 d^\dagger d + v^2 - uv(c^\dagger d^\dagger + dc), \\ b^\dagger b &= (vc + ud^\dagger)(vc^\dagger + ud) = v^2 cc^\dagger + u^2 d^\dagger d + uv(cd + d^\dagger c^\dagger) \\ &= -v^2 c^\dagger c + u^2 d^\dagger d + v^2 - uv(c^\dagger d^\dagger + dc), \\ a^\dagger b^\dagger &= (uc^\dagger - vd)(vc + ud^\dagger) = uv(c^\dagger c - dd^\dagger) + u^2 c^\dagger d^\dagger - v^2 dc \\ &= uv(c^\dagger c + d^\dagger d - 1) + u^2 c^\dagger d^\dagger - v^2 dc, \\ ba &= (a^\dagger b^\dagger)^\dagger = uv(c^\dagger c + d^\dagger d - 1) + u^2 dc - v^2 c^\dagger d^\dagger.\end{aligned}$$

Somando tudo (com $cd = -dc$ e $d^\dagger c^\dagger = -c^\dagger d^\dagger$, os termos cruzados de $a^\dagger a$ e $b^\dagger b$ se somam e combinam com os de Δ):

$$H = [\epsilon(u^2 - v^2) + 2\Delta uv](c^\dagger c + d^\dagger d) + [\Delta(u^2 - v^2) - 2\epsilon uv](c^\dagger d^\dagger + dc) + 2\epsilon v^2 - 2\Delta uv.$$

O termo anômalo se anula para

$$\tan 2\theta = \frac{\Delta}{\epsilon} \quad (u^2 - v^2 = \cos 2\theta, \quad 2uv = \sin 2\theta),$$

e, com $E \equiv \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}$ ($\cos 2\theta = \epsilon/E$, $\sin 2\theta = \Delta/E$),

$$\boxed{H = E(c^\dagger c + d^\dagger d) + \epsilon - E, \quad E = \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}$$

usando $2\epsilon v^2 - 2\Delta uv = \epsilon(1 - \cos 2\theta) - \Delta \sin 2\theta = \epsilon - E$. $\square$

(iii) Notação de Nambu–Gorkov

(a) $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$ satisfaz $\mathbf{U}\mathbf{U}^\top = (u^2 + v^2)\mathbb{1} = \mathbb{1}$; como $\mathbf{U}$ é real, $\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}^\dagger$ e $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger$: unitária (de fato, uma rotação, $\det \mathbf{U} = 1$). A inversa $\Phi = \mathbf{U}^\dagger \Psi$ reproduz as fórmulas do item (ii). $\square$

(b) Com $\Phi^\dagger = (a^\dagger \ b)$ e $h = \epsilon\tau_3 + \Delta\tau_1$:

$$\Phi^\dagger h \Phi = \epsilon(a^\dagger a - b b^\dagger) + \Delta(a^\dagger b^\dagger + b a) = \epsilon(a^\dagger a + b^\dagger b) - \epsilon + \Delta(a^\dagger b^\dagger + b a),$$

usando $b b^\dagger = 1 - b^\dagger b$. Logo $H = \Phi^\dagger h \Phi + \epsilon$. $\square$

(c) $H = \Psi^\dagger (\mathbf{U} h \mathbf{U}^\dagger) \Psi + \epsilon$. A rotação diagonaliza h : como $h = \epsilon\tau_3 + \Delta\tau_1$ tem autovalores $\pm E$,

$$\mathbf{U} h \mathbf{U}^\dagger = E \tau_3 \quad \text{para } \tan 2\theta = \Delta/\epsilon,$$

(rotação de ângulo 2θ no plano (τ_1, τ_3) do espaço de Nambu–Gorkov). Então

$$H = E(c^\dagger c - d d^\dagger) + \epsilon = E(c^\dagger c + d^\dagger d) + \epsilon - E,$$

exatamente a forma diagonal do item (ii): a transformação de Bogoliubov fermiônica é uma rotação no espaço de Nambu–Gorkov. $\square$

Questão 5 — Transformação de Bogoliubov bosônica

Bósons: $[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1$, demaiss comutadores nulos.

(i) Preservação da álgebra

Com $c = u a + v b^\dagger$ e $d^\dagger = v a + u b^\dagger$ (isto é, $d = v a^\dagger + u b$):

$$\begin{aligned} [c, c^\dagger] &= u^2 [a, a^\dagger] + v^2 [b^\dagger, b] = u^2 - v^2, \\ [d, d^\dagger] &= v^2 [a^\dagger, a] + u^2 [b, b^\dagger] = u^2 - v^2, \\ [c, d] &= uv [a, a^\dagger] + uv [b^\dagger, b] = uv - uv = 0, \\ [c, d^\dagger] &= [ua + vb^\dagger, va + ub^\dagger] = 0 \quad (\text{só aparecem } [a, a], [b^\dagger, b^\dagger], [a, b^\dagger], \dots). \end{aligned}$$

As regras canônicas são preservadas se, e somente se, $u^2 - v^2 = 1$; parametrize $u = \cosh \theta$, $v = \sinh \theta$. A troca de sinal em relação ao caso fermiônico vem da troca de anticomutadores por comutadores: o grupo deixa de ser compacto ($SO(2) \rightarrow$ “rotação hiperbólica” $SU(1, 1)$). $\square$

(ii) Inversa e diagonalização

A inversa (rotação hiperbólica por $-\theta$) é

$$a = u c - v d^\dagger, \quad b^\dagger = -v c + u d^\dagger.$$

Substituindo em $H = \epsilon(a^\dagger a + b^\dagger b) + \Delta(a^\dagger b^\dagger + ba)$, com ordenamento bosônico ($b^\dagger b = bb^\dagger - 1$ etc.):

$$\begin{aligned} a^\dagger a &= u^2 c^\dagger c + v^2 d^\dagger d + v^2 - uv(c^\dagger d^\dagger + dc), \\ b^\dagger b &= v^2 c^\dagger c + u^2 d^\dagger d + v^2 - uv(c^\dagger d^\dagger + dc), \\ a^\dagger b^\dagger + ba &= -2uv(c^\dagger c + d^\dagger d + 1) + (u^2 + v^2)(c^\dagger d^\dagger + dc). \end{aligned}$$

Portanto

$$H = [\epsilon(u^2 + v^2) - 2\Delta uv](c^\dagger c + d^\dagger d) + [\Delta(u^2 + v^2) - 2\epsilon uv](c^\dagger d^\dagger + dc) + 2\epsilon v^2 - 2\Delta uv.$$

O termo anômalo se anula para

$$\tanh 2\theta = \frac{\Delta}{\epsilon} \quad (u^2 + v^2 = \cosh 2\theta, \quad 2uv = \sinh 2\theta),$$

o que exige $|\Delta| < \epsilon$. Com $E \equiv \sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2}$ ($\cosh 2\theta = \epsilon/E$, $\sinh 2\theta = \Delta/E$):

$$\epsilon \cosh 2\theta - \Delta \sinh 2\theta = \frac{\epsilon^2 - \Delta^2}{E} = E, \quad 2\epsilon v^2 - 2\Delta uv = \epsilon(\cosh 2\theta - 1) - \Delta \sinh 2\theta = E - \epsilon,$$

e a forma diagonal é

$$H = E(c^\dagger c + d^\dagger d) + E - \epsilon, \quad E = \sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2}$$

$\square$

(iii) O que acontece se $\Delta \geq \epsilon$

A diagonalização exige $|\tanh 2\theta| = |\Delta|/\epsilon < 1$. Quando $\Delta \rightarrow \epsilon^-$, a frequência das quasipartículas $E = \sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2} \rightarrow 0$ (modo *gapless*) e os parâmetros $u, v \rightarrow \infty$: a transformação de Bogoliubov deixa de existir.

Para $\Delta \geq \epsilon$, E seria imaginário — não há forma diagonal com operadores bosônicos de frequência real. Fisicamente, o Hamiltoniano deixa de ser limitado inferiormente ou de definir oscilações estáveis: escrevendo H em termos de quadraturas, o termo $\Delta(a^\dagger b^\dagger + ba)$ “ganha” do termo $\epsilon(a^\dagger a + b^\dagger b)$ e uma direção no espaço de fase adquire curvatura negativa (modo instável, crescimento exponencial em vez de oscilação — instabilidade dinâmica). O ponto $\Delta = \epsilon$ marca o limiar dessa instabilidade, análogo ao critério de estabilidade de Landau em superfluidos: a criação espontânea de pares $a^\dagger b^\dagger$ passa a custar energia zero (ou negativa), e o “vácuo” de quasipartículas colapsa. $\square$