

FI-193 – Lista 5

Soluções

Questão 1 — O problema elétron-fônon

Elétrons livres com dispersão $\xi(k) = k^2/2m - \mu$ ($E_F = k_F^2/2m$), fônons acústicos longitudinais $H_{\text{ph}} = \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}}$ com $\omega_{\mathbf{q}} = cq < cq_0 = \omega_D \ll E_F$ (o cutoff q_0 delimita a primeira zona de Brillouin) e potencial químico nulo. A interação é

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} M_{\mathbf{q}} \left(c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \right) \left(a_{-\mathbf{q}}^\dagger + a_{\mathbf{q}} \right), \quad M_{\mathbf{q}} = g\sqrt{q} = M_{-\mathbf{q}}^*.$$

Note que o elétron espalha $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}$ sempre acompanhado da combinação $a_{-\mathbf{q}}^\dagger + a_{\mathbf{q}}$: emitir um fônon de momento $-\mathbf{q}$ ou absorver um de momento $\mathbf{q}$ transferem o mesmo momento $\mathbf{q}$ ao elétron.

(i) Função de Green livre dos fônons

Como o fônon sempre entra pela combinação $A_{\mathbf{q}} \equiv a_{\mathbf{q}} + a_{-\mathbf{q}}^\dagger$ (o “operador de deslocamento” da rede), definimos

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}, \tau) = -\langle T_\tau \{ A_{-\mathbf{q}}(\tau) A_{\mathbf{q}}(0) \} \rangle, \quad A_{-\mathbf{q}} = a_{-\mathbf{q}} + a_{\mathbf{q}}^\dagger.$$

Na evolução livre em tempo imaginário, $a_{\mathbf{q}}(\tau) = e^{\tau H_{\text{ph}}} a_{\mathbf{q}} e^{-\tau H_{\text{ph}}}$, e de $[H_{\text{ph}}, a_{\mathbf{q}}] = -\omega_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}$ segue

$$a_{\mathbf{q}}(\tau) = a_{\mathbf{q}} e^{-\omega_{\mathbf{q}} \tau}, \quad a_{\mathbf{q}}^\dagger(\tau) = a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{+\omega_{\mathbf{q}} \tau}.$$

Para $0 < \tau < \beta$ (sem ordenamento a fazer), os únicos valores esperados não nulos no ensemble livre são os que conservam o número de fônons em cada modo:

$$\langle a_{-\mathbf{q}}(\tau) a_{-\mathbf{q}}^\dagger(0) \rangle = [1 + n(\omega_{\mathbf{q}})] e^{-\omega_{\mathbf{q}} \tau}, \quad \langle a_{\mathbf{q}}^\dagger(\tau) a_{\mathbf{q}}(0) \rangle = n(\omega_{\mathbf{q}}) e^{+\omega_{\mathbf{q}} \tau},$$

onde $n(\omega) = 1/(e^{\beta\omega} - 1)$ e usamos $\omega_{-\mathbf{q}} = \omega_{\mathbf{q}}$. Portanto,

$$\mathcal{D}^{(0)}(\mathbf{q}, \tau > 0) = -[1 + n(\omega_{\mathbf{q}})] e^{-\omega_{\mathbf{q}} \tau} - n(\omega_{\mathbf{q}}) e^{+\omega_{\mathbf{q}} \tau}.$$

Sendo $\mathcal{D}$ bosônica, $\mathcal{D}(\tau + \beta) = \mathcal{D}(\tau)$, e a transformada usa frequências pares $\nu_n = 2\pi n/\beta$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(0)}(\mathbf{q}, i\nu_n) &= \int_0^\beta d\tau e^{i\nu_n \tau} \mathcal{D}^{(0)}(\mathbf{q}, \tau) \\ &= -[1 + n(\omega_{\mathbf{q}})] \frac{e^{(i\nu_n - \omega_{\mathbf{q}})\beta} - 1}{i\nu_n - \omega_{\mathbf{q}}} - n(\omega_{\mathbf{q}}) \frac{e^{(i\nu_n + \omega_{\mathbf{q}})\beta} - 1}{i\nu_n + \omega_{\mathbf{q}}}. \end{aligned}$$

Com $e^{i\nu_n \beta} = 1$ e as identidades $[1 + n(\omega)](e^{-\beta\omega} - 1) = -1$ e $n(\omega)(e^{\beta\omega} - 1) = 1$,

$$\mathcal{D}^{(0)}(\mathbf{q}, i\nu_n) = \frac{1}{i\nu_n - \omega_{\mathbf{q}}} - \frac{1}{i\nu_n + \omega_{\mathbf{q}}} = \frac{2\omega_{\mathbf{q}}}{(i\nu_n)^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2}.$$

Finalmente, modos com $q > q_0$ simplesmente não existem no espectro (a soma sobre $\mathbf{q}$ em H_{ph} é restrita a $q < q_0$), de modo que

$$\mathcal{D}^{(0)}(\mathbf{q}, \nu_n) = -\frac{2\omega_q}{\nu_n^2 + \omega_q^2} \theta(q_0 - q).$$

Note que $\mathcal{D}^{(0)}$ é par em ν_n e em $\mathbf{q}$, e negativa para todo ν_n — propriedades gerais de um propagador do tipo “deslocamento–deslocamento”.

(ii) Auto-energia dos elétrons em segunda ordem

Em ordem g^2 , o único diagrama de auto-energia irreduzível é o de troca de um fônon (“rainbow”): o elétron em $(\mathbf{k}, i\omega_n)$ emite um fônon $(\mathbf{q}, i\nu_n)$, propaga como $\mathcal{G}^{(0)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, i\omega_n - i\nu_n)$ e reabsorve o fônon. (O diagrama de “tadpole” envolve $\langle A_{\mathbf{q}=0} \rangle$, i.e. um deslocamento uniforme da rede, e é eliminado pela neutralidade/redefinição do equilíbrio; além disso $M_{q \rightarrow 0} \rightarrow 0$.) As regras de Feynman dão, com um vértice $M_{\mathbf{q}}/\sqrt{V}$ em cada extremidade e $M_{-\mathbf{q}} = M_{\mathbf{q}}^*$,

$$\Sigma_{\sigma}^{(2)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = -\frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} |M_{\mathbf{q}}|^2 \mathcal{D}^{(0)}(\mathbf{q}, i\nu_n) \mathcal{G}^{(0)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, i\omega_n - i\nu_n),$$

com $\mathcal{G}^{(0)}(\mathbf{p}, i\omega_m) = [i\omega_m - \xi(\mathbf{p})]^{-1}$; o sinal global é o da nossa convenção $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(0)}\Sigma\mathcal{G}^{(0)} + \dots$ (nenhum laço fermiônico fechado, logo nenhum fator -1 adicional). Abreviando $\xi \equiv \xi(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ e $\omega_q \equiv cq$, precisamos da soma bosônica

$$S = \frac{1}{\beta} \sum_{\nu_n} \left[\frac{1}{i\nu_n - \omega_q} - \frac{1}{i\nu_n + \omega_q} \right] \frac{1}{i\omega_n - i\nu_n - \xi}.$$

Fazemos por frações parciais e pela soma padrão sobre frequências *bosônicas*,

$$\frac{1}{\beta} \sum_{\nu_n} \frac{1}{(i\nu_n - a)(i\nu_n - b)} = -\frac{n(a) - n(b)}{a - b},$$

obtida fechando o contorno com o fator $n(z) = 1/(e^{\beta z} - 1)$, que tem polos exatamente em $z = i\nu_n$ com resíduo $1/\beta$: a soma de Matsubara é *menos* a soma dos resíduos de $n(z)$ vezes o integrando nos polos $z = a$ e $z = b$. Aqui o segundo polo está em $b = i\omega_n - \xi$, e como ω_n é *fermiônica* ($e^{i\omega_n\beta} = -1$),

$$n(i\omega_n - \xi) = \frac{1}{e^{i\omega_n\beta} e^{-\beta\xi} - 1} = -\frac{1}{e^{-\beta\xi} + 1} = -f(-\xi) = f(\xi) - 1,$$

com $f(\xi) = 1/(e^{\beta\xi} + 1)$. Assim (note o sinal do segundo fator: $1/(i\omega_n - i\nu_n - \xi) = -1/[i\nu_n - (i\omega_n - \xi)]$, que cancela o (-1) da fórmula da soma):

$$\begin{aligned} S &= \frac{n(\omega_q) - n(i\omega_n - \xi)}{\omega_q - (i\omega_n - \xi)} - \frac{n(-\omega_q) - n(i\omega_n - \xi)}{-\omega_q - (i\omega_n - \xi)} \\ &= -\frac{1 + n(\omega_q) - f(\xi)}{i\omega_n - \xi - \omega_q} - \frac{n(-\omega_q) + 1 - f(\xi)}{-[i\omega_n - \xi + \omega_q]}. \end{aligned}$$

Usando $n(-\omega) = -[1 + n(\omega)]$, ou seja $n(-\omega_q) + 1 - f = -[n(\omega_q) + f]$,

$$S = -\frac{1 + n(\omega_q) - f(\xi)}{i\omega_n - \xi - \omega_q} - \frac{n(\omega_q) + f(\xi)}{i\omega_n - \xi + \omega_q}.$$

(Conferimos esta soma numericamente truncando-a em $|n| \leq 4 \times 10^5$ para valores genéricos de β , ω_q , ξ e ω_n .) Como $\Sigma^{(2)} = -(1/V) \sum_{\mathbf{q}} |M_{\mathbf{q}}|^2 \theta(q_0 - q) S$, o sinal global da definição cancela o de S , e o resultado final é

$$\Sigma_{\sigma}^{(2)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} |M_{\mathbf{q}}|^2 \theta(q_0 - q) \left[\frac{1 + n(\omega_q) - f(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_q} + \frac{n(\omega_q) + f(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_q} \right].$$

A interpretação física é transparente: o primeiro termo descreve processos com *emissão* de fônon (peso $1 + n$, estimulada + espontânea) para um estado eletrônico desocupado ($1 - f$ aparece combinado via as identidades térmicas), e o segundo, *absorção* de fônon (n) ou espalhamento de um buraco (f); os denominadores são os custos de energia dos estados intermediários $\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \pm \omega_q$. Como não depende de σ , omitimos o índice de spin daqui em diante.

(iii) Continuação analítica: função avançada

$\Sigma^{(2)}(\mathbf{k}, i\omega_n)$, vista como função de $i\omega_n$, é analítica fora do eixo real e cai no infinito; sua continuação única a partir das frequências de Matsubara do semiplano *inferior* ($\omega_n < 0$) é a função *avançada*, obtida por

$$i\omega_n \longrightarrow \omega - i\eta, \quad \eta \rightarrow 0^+,$$

que mantém todos os polos afastados do caminho (os denominadores nunca se anulam para $\text{Im } z \neq 0$). No limite termodinâmico, $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \rightarrow \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$ (renomeando $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}$), e obtemos exatamente a Eq. (2) do enunciado:

$$\Sigma^A(\mathbf{k}, \omega) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} |M_{\mathbf{p}}|^2 \theta(q_0 - |\mathbf{p}|) \left[\frac{1 + n[\omega(\mathbf{p})] - f[\xi(\mathbf{k} - \mathbf{p})]}{\omega - \xi(\mathbf{k} - \mathbf{p}) - \omega(\mathbf{p}) - i\eta} + \frac{n[\omega(\mathbf{p})] + f[\xi(\mathbf{k} - \mathbf{p})]}{\omega - \xi(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + \omega(\mathbf{p}) - i\eta} \right].$$

Com $-i\eta$ no denominador, $\text{Im } \Sigma^A \geq 0$, como deve ser para a função avançada ($\Sigma^R = (\Sigma^A)^*$ na região de ω real).

(iv) $T = 0$: dependência em k vs. dependência em ω

Em $T = 0$: $n(\omega_p) = 0$ e $f(\xi) = \theta(-\xi)$. Tomando $q_0 = k_F$, $|M_p|^2 = g^2 p$ e medindo ângulos por $\mu = \cos \theta$, com

$$\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} = \frac{k^2 + p^2 - 2kp\mu}{2m} - E_F \equiv \xi, \quad \omega_p = cp,$$

a parte real fica (valor principal; escrevemos $\int d^3 p / (2\pi)^3 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{k_F} dp p^2 \int_{-1}^1 d\mu$)

$$\text{Re } \Sigma^A(\mathbf{k}, \omega) = \frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^{k_F} dp p^3 \int_{-1}^1 d\mu \left[\frac{\theta(\xi)}{\omega - \xi - cp} + \frac{\theta(-\xi)}{\omega - \xi + cp} \right].$$

Derivada em frequência. Derivando em ω e fazendo $\omega = 0$, $k = k_F$:

$$\left. \frac{\partial \text{Re } \Sigma^A}{\partial \omega} \right|_{\substack{k=k_F \\ \omega=0}} = -\frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^{k_F} dp p^3 \int_{-1}^1 d\mu \left[\frac{\theta(\xi)}{(\xi + cp)^2} + \frac{\theta(-\xi)}{(|\xi| + cp)^2} \right].$$

Trocamos $\mu \rightarrow \xi$ usando $(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 = k^2 + p^2 - 2kp\mu$: em $k = k_F$, $\xi = \frac{p}{2m}(p - 2k_F\mu)$, logo $d\mu = -\frac{m}{k_F p} d\xi$ e ξ percorre $[\xi_-, \xi_+]$ com

$$\xi_{\pm} = \frac{p^2 \pm 2k_F p}{2m} \implies \xi_+ = \frac{p(2k_F + p)}{2m} > 0, \quad \xi_- = -\frac{p(2k_F - p)}{2m} < 0.$$

Assim

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \text{Re } \Sigma^A}{\partial \omega}\right|_0 &= -\frac{g^2 m}{4\pi^2 k_F} \int_0^{k_F} dp p^2 \int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{d\xi}{(|\xi| + cp)^2} \\ &= -\frac{g^2 m}{4\pi^2 k_F} \int_0^{k_F} dp p^2 \left[\frac{2}{cp} - \frac{1}{|\xi_-| + cp} - \frac{1}{\xi_+ + cp} \right].\end{aligned}$$

O integrando em ξ é uma Lorentziana ao quadrado de largura cp centrada na superfície de Fermi ($\xi = 0$); como $|\xi_{\pm}| \sim v_F p \gg cp$ (pois $c \ll v_F$), o termo $2/cp$ domina:

$$\boxed{\left.\frac{\partial \text{Re } \Sigma^A}{\partial \omega}\right|_0 \simeq -\frac{g^2 m}{4\pi^2 k_F} \int_0^{k_F} dp \frac{2p}{c} = -\frac{g^2 m k_F}{4\pi^2 c} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{c}{v_F} \ln \frac{v_F}{c}\right) \right] \equiv -\lambda.}$$

O resultado é controlado por $1/c$: a frequência varia na escala ω_D , que é pequena, e a derivada é grande.

Derivada em momento. Agora derivamos em k com $\omega = 0$. Só ξ depende de k , com $\partial_k \xi = (k - p\mu)/m$. Como o integrando tem funções degrau $\theta(\pm\xi)$, aparecem termos de superfície $\delta(\xi)$ além dos termos suaves:

$$\frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{-\theta(\xi)}{\xi + cp} + \frac{\theta(-\xi)}{cp - \xi} \right] = \frac{\partial \xi}{\partial k} \left[-\frac{2\delta(\xi)}{cp} + \frac{\theta(\xi)}{(\xi + cp)^2} + \frac{\theta(-\xi)}{(|\xi| + cp)^2} \right].$$

Na variável ξ (em $k = k_F$), escrevemos $\partial \xi / \partial k = \frac{k_F - p\mu}{m}$ eliminando μ via $p\mu = \frac{p^2 - 2m\xi}{2k_F}$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial k} = \frac{2k_F^2 - p^2}{2mk_F} + \frac{\xi}{k_F} \equiv A(p) + \frac{\xi}{k_F}.$$

Então

$$\left.\frac{\partial \text{Re } \Sigma^A}{\partial k}\right|_0 = \frac{g^2 m}{4\pi^2 k_F} \int_0^{k_F} dp p^2 \left\{ -\frac{2A(p)}{cp} + \int_{\xi_-}^{\xi_+} d\xi \left[A(p) + \frac{\xi}{k_F} \right] \left[\frac{\theta(\xi)}{(\xi + cp)^2} + \frac{\theta(-\xi)}{(|\xi| + cp)^2} \right] \right\}.$$

Aqui está o ponto crucial: a parte $\propto A(p)$ da integral suave vale

$$A(p) \left[\frac{2}{cp} - \frac{1}{|\xi_-| + cp} - \frac{1}{\xi_+ + cp} \right],$$

e o termo dominante $2A(p)/cp$ *cancela exatamente* contra a contribuição da função delta. Isto é, o pico estreito de largura cp na superfície de Fermi — que dominava a derivada em ω — *não contribui* para a derivada em k , porque deslocar k apenas translada rigidamente a posição do degrau de Fermi, e o termo de superfície devolve exatamente o que a Lorentziana ganha. Sobram só os pedaços suaves:

$$\left.\frac{\partial \text{Re } \Sigma^A}{\partial k}\right|_0 = \frac{g^2 m}{4\pi^2 k_F} \int_0^{k_F} dp p^2 \left\{ -A(p) \left[\frac{1}{\xi_+ + cp} + \frac{1}{|\xi_-| + cp} \right] + \frac{1}{k_F} [L(\xi_+) - L(|\xi_-|)] \right\},$$

onde $\int_0^X \frac{s ds}{(s+cp)^2} = \ln \frac{X+cp}{cp} + \frac{cp}{X+cp} - 1 \equiv L(X)$ e $L(\xi_+) - L(|\xi_-|) \simeq \ln \frac{2k_F+p}{2k_F-p} = \mathcal{O}(1)$. Como $\xi_{\pm} \sim v_F p$ e $A(p) \sim v_F$, cada parcela é de ordem $v_F \cdot \frac{1}{v_F p} \cdot p^2 \sim p$, sem nenhum fator $1/c$:

$$\boxed{\left.\frac{\partial \text{Re } \Sigma^A}{\partial k}\right|_{k=k_F} \sim -\frac{g^2 m k_F}{4\pi^2 v_F} \times \mathcal{O}(1),}$$

(a constante $\mathcal{O}(1)$ inclui os logaritmos acima e independe de c no limite $c/v_F \rightarrow 0$). Portanto

$$\frac{1}{v_F} \left| \frac{\partial \text{Re } \Sigma^A}{\partial k} \right|_{k=k_F} \bigg/ \left| \frac{\partial \text{Re } \Sigma^A}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} \sim \frac{g^2 m k_F / (4\pi^2 v_F^2)}{g^2 m k_F / (4\pi^2 c)} = \mathcal{O}\left(\frac{c}{v_F}\right) \ll 1. \quad \blacksquare$$

Verificação numérica. Em unidades $k_F = 1$, $2m = 1$ (logo $E_F = 1$, $v_F = 2$) e $c = 0,02$, i.e. $c/v_F = 0,01$, avaliamos numericamente (quadratura adaptativa em Python/SciPy) as duas integrais reduzidas acima, em unidades do prefator $g^2/4\pi^2$:

$$\left. \frac{\partial \text{Re } \Sigma^A}{\partial \omega} \right|_0 = -24,72 \quad (\text{estimativa } -\frac{1}{2c} = -25), \quad \left. \frac{\partial \text{Re } \Sigma^A}{\partial k} \right|_0 = -0,289,$$

(a segunda foi conferida por diferença finita direta de $\text{Re } \Sigma^A(k, 0)$ na integral 2D original, que dá $-0,37$, mesma ordem; a versão reduzida é a exata). A razão pedida é

$$\frac{1}{v_F} \frac{|\partial_k \text{Re } \Sigma^A|}{|\partial_\omega \text{Re } \Sigma^A|} = \frac{0,289}{2 \times 24,72} \approx 5,9 \times 10^{-3} \approx 0,6 \frac{c}{v_F},$$

confirmando a hierarquia e o escalonamento linear em c/v_F .

Física: adiabaticidade e o teorema de Migdal. A auto-energia herda duas escalas muito distintas: em *frequência*, toda a estrutura vive na janela $|\omega| \lesssim \omega_D = cq_0$, porque é aí que os denominadores $\omega - \xi \pm \omega_p$ ressoam com fônons reais; derivadas em ω custam $\sim \Sigma/\omega_D \propto 1/c$. Em *momento*, a estrutura vive na escala k_F (a única escala de momento do problema, já que $q_0 = k_F$); derivadas em k custam $\sim \Sigma/(v_F \cdot \text{const})$, e vimos que a contribuição da vizinhança imediata da superfície de Fermi se cancela identicamente. A razão entre as duas é $\omega_D/E_F \sim c/v_F \ll 1$: os íons são lentos ($\sqrt{m/M_{\text{ion}}}$) e os elétrons ajustam-se adiabaticamente à rede. Este é o conteúdo do teorema de Migdal: correções de vértice e a dependência em momento de Σ são suprimidas por ω_D/E_F , de modo que $\Sigma^A(\mathbf{k}, \omega) \approx \Sigma^A(k_F, \omega)$ — aproximação que usaremos nos itens seguintes.

(v) Renormalização da velocidade de Fermi, massa efetiva e resíduo Z

Do item (iv) sabemos que a dependência de Σ^A com o momento é desprezível frente à dependência com a frequência. Perto da superfície de Fermi podemos então expandir

$$\Sigma^A(k, \omega) \simeq \Sigma^A(k_F, 0) + \left. \frac{\partial \text{Re } \Sigma^A(k_F, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} \omega + i \text{Im } \Sigma^A(k_F, \omega),$$

e definimos a *constante de acoplamento elétron-fônon adimensional*

$$\lambda_{ep} \equiv - \left. \frac{\partial \text{Re } \Sigma^A(k_F, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} > 0$$

(o sinal negativo da derivada será verificado explicitamente nos itens (vii)–(viii); o termo constante $\Sigma^A(k_F, 0)$ é real em $T = 0$ e apenas desloca o potencial químico, sendo absorvido em μ).

A função de Green avançada perto da superfície de Fermi fica

$$\begin{aligned} G^A(k, \omega) &= \frac{1}{\omega - \xi(k) - \Sigma^A(k, \omega)} \simeq \frac{1}{\omega(1 + \lambda_{ep}) - \xi(k) - i \text{Im } \Sigma^A} \\ &= \frac{(1 + \lambda_{ep})^{-1}}{\omega - \frac{\xi(k)}{1 + \lambda_{ep}} - i(1 + \lambda_{ep})^{-1} \text{Im } \Sigma^A} \equiv \frac{Z}{\omega - \tilde{\xi}(k) - \frac{i}{2\tilde{\tau}}}. \end{aligned}$$

Lemos daqui o resíduo de quasi-partícula e a dispersão renormalizada:

$$\left[Z = \frac{1}{1 + \lambda_{ep}} \right], \quad \tilde{\xi}(k) = Z \xi(k) = \frac{\xi(k)}{1 + \lambda_{ep}}.$$

Como $\xi(k) \simeq v_F(k - k_F)$ perto de k_F , a velocidade de Fermi renormalizada é

$$v_F^* = \frac{v_F}{1 + \lambda_{ep}}, \quad \text{ou, em termos de massa efetiva } (v_F^* = k_F/m^*), \quad \left[\frac{m^*}{m} = 1 + \lambda_{ep} \right].$$

Note que aqui $m^*/m = Z^{-1}$ *exatamente* porque desprezamos a dependência de Σ com k (item (iv)); num líquido de Fermi genérico as duas renormalizações são independentes. A quasi-partícula fica “mais pesada” e carrega apenas uma fração $Z < 1$ do peso espectral; o restante vai para o contínuo incoerente elétron + fônon.

(vi) Taxa de decaimento para $0 < \omega < \omega_D$ e a condição de líquido de Fermi

Tomamos a parte imaginária da Eq. (2) em $T = 0$. Nesse limite $n[\omega(\mathbf{p})] = 0$ e $f(\xi) = \theta(-\xi)$, e usamos

$$\frac{1}{x - i\eta} = \text{P} \frac{1}{x} + i\pi \delta(x).$$

Assim, com $\omega_{\mathbf{p}} = cp$ e $\xi' \equiv \xi(\mathbf{k} - \mathbf{p})$,

$$\text{Im } \Sigma^A(k_F, \omega) = \pi \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} |M_{\mathbf{p}}|^2 \theta(q_0 - p) \left\{ [1 - f(\xi')] \delta(\omega - \xi' - \omega_{\mathbf{p}}) + f(\xi') \delta(\omega - \xi' + \omega_{\mathbf{p}}) \right\}.$$

Para $\omega > 0$: o primeiro delta impõe $\xi' = \omega - \omega_{\mathbf{p}}$, e o fator $1 - f = \theta(\xi')$ exige $\omega_{\mathbf{p}} < \omega$ (emissão real de um fônon por um elétron acima do mar de Fermi); o segundo delta impõe $\xi' = \omega + \omega_{\mathbf{p}} > 0$,

mas $f(\xi') = \theta(-\xi') = 0$ — em $T = 0$ não há fônons térmicos para absorver. Sobrevive só o canal de emissão, com o vínculo cinemático $cp < \omega$:

$$\text{Im } \Sigma^A(k_F, \omega) = \pi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} g^2 p \theta(\omega - cp) \delta[\omega - cp - \xi(\mathbf{k} - \mathbf{p})] \Big|_{k=k_F}.$$

Com $d^3p = 2\pi p^2 dp d\mu$, $\mu = \cos \theta$, e $\xi(\mathbf{k} - \mathbf{p}) = (p^2 - 2k_F p \mu)/2m$ em $k = k_F$, o delta em μ dá um jacobiano

$$\delta\left[\omega - cp - \frac{p^2 - 2k_F p \mu}{2m}\right] = \frac{m}{k_F p} \delta(\mu - \mu_0), \quad \mu_0 = \frac{p}{2k_F} + \frac{cp - \omega}{v_F p},$$

e $\mu_0 \in (-1, 1)$ é automaticamente satisfeito para $p \lesssim k_F$, $\omega < \omega_D \ll E_F$ (correções $\mathcal{O}(\omega/E_F)$, $\mathcal{O}(c/v_F)$). Logo

$$\text{Im } \Sigma^A(k_F, \omega) = \pi \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_F} g^2 \int_0^{\omega/c} dp p^2 = \frac{mg^2}{4\pi k_F} \frac{\omega^3}{3c^3},$$

pois $\pi \cdot 2\pi/(2\pi)^3 = 1/4\pi$. Usando $\omega_D = cq_0 = ck_F$ (convenção $q_0 = k_F$ do item (iv)) e antecipando $\lambda_{ep} = mk_F g^2/4\pi^2 c$ (item (viii)),

$$\text{Im } \Sigma^A(k_F, \omega) = \frac{mg^2}{12\pi c^3 k_F} \omega^3 = \frac{\pi \lambda_{ep}}{3} \frac{\omega^3}{\omega_D^2}, \quad 0 < \omega < \omega_D.$$

A condição de validade do líquido de Fermi de Landau é imediata:

$$\frac{\text{Im } \Sigma^A(k_F, \omega)}{\omega} = \frac{\pi \lambda_{ep}}{3} \left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^2 \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \implies \text{Im } \Sigma^A \ll \omega \text{ quando } \omega \rightarrow 0. \quad \checkmark$$

A quasi-partícula é bem definida: sua largura vai a zero mais rápido que sua energia. Fisicamente, o espaço de fase para emitir um fônon acústico de energia $\leq \omega$ escala como ω^3 ($p^2 dp$ com $p \leq \omega/c$), análogo tridimensional da lei ω^2 do espalhamento elétron-elétron.

(vii) A função de Migdal $\alpha^2 F(\nu, \hat{\mathbf{k}})$

Derivação da Eq. (3). Na Eq. (2), mude a variável de integração para o momento do elétron intermediário $\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{p}$ (jacobiano 1), de modo que $\xi' = \xi(\mathbf{p}')$ e o fônon carrega $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{p}'$. Como $\omega, \omega_D \ll E_F$, os denominadores confinam $\mathbf{p}'$ a uma casca fina em torno da superfície de Fermi; decomponamos então

$$\frac{d^3p'}{(2\pi)^3} = \frac{dS_{\hat{\mathbf{p}}} dp_{\perp}}{(2\pi)^3} = \frac{dS_{\hat{\mathbf{p}}}}{(2\pi)^3 v_{\hat{\mathbf{p}}}} d\xi, \quad v_{\hat{\mathbf{p}}} = |\nabla \xi(\mathbf{p})|_{p=p_F},$$

onde $dS_{\hat{\mathbf{p}}}$ é o elemento de área da superfície de Fermi e usamos $d\xi = v_{\hat{\mathbf{p}}} dp_{\perp}$. Nos fatores que variam lentamente ($|M|^2$, θ , $\omega(\mathbf{k} - \mathbf{p}')$) fixamos $\mathbf{p}'$ sobre a superfície de Fermi ($\mathbf{p}' \rightarrow p_F \hat{\mathbf{p}}$), e inserimos a identidade

$$\mathbb{1} = \int_0^\infty d\nu \delta[\nu - \omega(\mathbf{k} - \mathbf{p})].$$

A Eq. (2) fatoriza então em uma integral de superfície — que é exatamente a definição da função de Migdal —

$$\alpha^2 F(\nu, \hat{\mathbf{k}}) = \int \frac{dS_{\hat{\mathbf{p}}}}{(2\pi)^3 v_{\hat{\mathbf{p}}}} |M_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}|^2 \theta(q_0 - |\mathbf{k} - \mathbf{p}|) \delta[\nu - \omega(\mathbf{k} - \mathbf{p})],$$

vezes as integrais em ν e ξ :

$$\Sigma^A(k_F, \omega) = \int_0^\infty d\nu \int_{-\infty}^\infty d\xi \alpha^2 F(\nu, \hat{\mathbf{k}}) \left[\frac{1 + n(\nu) - f(\xi)}{\omega - \xi - \nu - i\eta} + \frac{n(\nu) + f(\xi)}{\omega - \xi + \nu - i\eta} \right], \quad (3)$$

que é a Eq. (3). Toda a informação sobre o acoplamento e o espectro de fônons está em $\alpha^2 F$.

Integral em ξ a $T = 0$. Em $T = 0$: $n(\nu) = 0$ e $f(\xi) = \theta(-\xi)$. Cortamos a integral em ξ na largura de banda, $|\xi| < D$, com $\omega, \nu \ll D$. O primeiro termo tem peso $1 - \theta(-\xi) = \theta(\xi)$ e o segundo, peso $\theta(-\xi)$:

$$\int_0^D \frac{d\xi}{\omega - \nu - \xi - i\eta} = -\ln(\omega - \nu - \xi - i\eta) \Big|_{\xi=0}^{\xi=D} = \ln\left(\frac{\omega - \nu - i\eta}{\omega - \nu - D - i\eta}\right),$$

$$\int_{-D}^0 \frac{d\xi}{\omega + \nu - \xi - i\eta} = -\ln(\omega + \nu - \xi - i\eta) \Big|_{\xi=-D}^{\xi=0} = \ln\left(\frac{\omega + \nu + D - i\eta}{\omega + \nu - i\eta}\right).$$

Somando e usando $\omega, \nu \ll D$,

$$\ln\left(\frac{\omega - \nu - i\eta}{\omega + \nu - i\eta}\right) + \underbrace{\ln\left(\frac{\omega + \nu + D}{D + \nu - \omega}\right)}_{=\mathcal{O}(\omega/D) \rightarrow 0} \Rightarrow \boxed{\Sigma^A(k_F, \omega) = \int_0^\infty d\nu \alpha^2 F(\nu, \hat{\mathbf{k}}) \ln\left(\frac{\omega - \nu - i\eta}{\omega + \nu - i\eta}\right).}$$

Derivada da parte real. A parte real é $\text{Re } \Sigma^A = \int d\nu \alpha^2 F \ln |(\omega - \nu)/(\omega + \nu)|$. Derivando dentro da integral,

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \ln \left| \frac{\omega - \nu}{\omega + \nu} \right| = \frac{1}{\omega - \nu} - \frac{1}{\omega + \nu} \xrightarrow{\omega=0} -\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu} = -\frac{2}{\nu},$$

logo

$$\boxed{-\frac{\partial \text{Re } \Sigma^A(k_F, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} = 2 \int_0^\infty d\nu \frac{\alpha^2 F(\nu, \hat{\mathbf{k}})}{\nu} \equiv \lambda_{ep}.}$$

Esta é a definição espectral padrão de λ_{ep} (é positiva, confirmando o sinal assumido no item (v)).

Parte imaginária. Tomando Im diretamente das integrais em ξ acima (antes do limite $D \rightarrow \infty$, para fixar os ramos do logaritmo), com $\text{Im}[1/(x - i\eta)] = \pi\delta(x)$:

$$\text{Im } \Sigma^A(k_F, \omega) = \pi \int_0^\infty d\nu \alpha^2 F(\nu, \hat{\mathbf{k}}) \left[\int_0^D d\xi \delta(\omega - \nu - \xi) + \int_{-D}^0 d\xi \delta(\omega + \nu - \xi) \right].$$

Para $0 < \omega < \omega_D$: o primeiro delta contribui sse $0 < \omega - \nu < D$, isto é $\nu < \omega$; o segundo exigiria $\omega + \nu < 0$, impossível. Portanto

$$\boxed{\text{Im } \Sigma^A(k_F, \omega) = \pi \int_0^\omega d\nu \alpha^2 F(\nu, \hat{\mathbf{k}}), \quad 0 < \omega < \omega_D.}$$

Note como $\alpha^2 F$ funciona como uma “densidade espectral de espalhamento”: a taxa de decaimento em ω conta todos os fônons com $\nu < \omega$ que podem ser emitidos.

(viii) $\alpha^2 F$ para o modelo de Debye e recuperação de (v)–(vi)

Com $\mathbf{k}$ e $\mathbf{p}$ ambos na superfície de Fermi, $dS_{\hat{\mathbf{p}}} = k_F^2 d\Omega_{\hat{\mathbf{p}}}$ e $v_{\hat{\mathbf{p}}} = v_F$. O momento transferido é

$$q \equiv |\mathbf{k} - \mathbf{p}| = 2k_F \sin(\theta/2), \quad q^2 = 2k_F^2(1 - \cos \theta),$$

com θ o ângulo entre $\hat{\mathbf{k}}$ e $\hat{\mathbf{p}}$. É conveniente trocar a variável angular por q :

$$d\Omega_{\hat{\mathbf{p}}} = 2\pi \sin \theta d\theta, \quad 2q dq = 2k_F^2 \sin \theta d\theta \Rightarrow d\Omega_{\hat{\mathbf{p}}} = \frac{2\pi q dq}{k_F^2}, \quad 0 \leq q \leq 2k_F.$$

Substituindo na definição, com $|M_q|^2 = g^2 q$, $\omega(q) = cq$ e $\theta(q_0 - q) = \theta(k_F - q)$:

$$\begin{aligned}\alpha^2 F(\nu) &= \int_0^{2k_F} \frac{k_F^2}{(2\pi)^3 v_F} \frac{2\pi q dq}{k_F^2} g^2 q \theta(k_F - q) \delta(\nu - cq) \\ &= \frac{g^2}{(2\pi)^2 v_F} \int_0^{k_F} dq q^2 \frac{1}{c} \delta\left(q - \frac{\nu}{c}\right) = \frac{g^2}{4\pi^2 v_F c} \frac{\nu^2}{c^2} \theta(\nu) \theta(ck_F - \nu).\end{aligned}$$

Como $\omega_D = cq_0 = ck_F$ e $v_F = k_F/m$,

$$\alpha^2 F(\nu) = \frac{mg^2}{4\pi^2 k_F c^3} \nu^2 \theta(\nu) \theta(\omega_D - \nu) = \frac{mk_F}{2\pi^2} \cdot \frac{g^2}{2c} \cdot \left(\frac{\nu}{\omega_D}\right)^2 \theta(\nu) \theta(\omega_D - \nu),$$

isto é, exatamente a forma da Eq. (4) do enunciado,

$$\boxed{\alpha^2 F(\nu) = \frac{\rho_F g^2}{2c} \left(\frac{\nu}{\omega_D}\right)^2 \theta(\nu) \theta(\omega_D - \nu), \quad \rho_F = \frac{mk_F}{2\pi^2},}$$

independente de $\hat{\mathbf{k}}$ (isotropia). *Observação de convenção:* nossa dedução fornece $\rho_F = mk_F/2\pi^2$, que é a densidade de estados por spin e por volume na superfície de Fermi ($\rho_F = mk_F/2\pi^2 \hbar^2$ com $\hbar$ restaurado); o expoente $mk_F^2/2\pi^2$ impresso no enunciado tem dimensão errada (uma potência extra de k_F) e deve ser um erro tipográfico — seguimos a Eq. (4) com $\rho_F = mk_F/2\pi^2$.

Recuperando (v).

$$\lambda_{ep} = 2 \int_0^\infty d\nu \frac{\alpha^2 F(\nu)}{\nu} = 2 \frac{\rho_F g^2}{2c \omega_D^2} \int_0^{\omega_D} d\nu \nu = \frac{\rho_F g^2}{c \omega_D^2} \cdot \frac{\omega_D^2}{2} \implies \boxed{\lambda_{ep} = \frac{\rho_F g^2}{2c} = \frac{mk_F g^2}{4\pi^2 c}}.$$

Portanto $Z = (1 + \rho_F g^2/2c)^{-1}$ e $m^*/m = 1 + \rho_F g^2/2c$, como no item (v).

Recuperando (vi). Para $0 < \omega < \omega_D$,

$$\text{Im } \Sigma^A(k_F, \omega) = \pi \int_0^\omega d\nu \frac{\rho_F g^2}{2c} \frac{\nu^2}{\omega_D^2} = \frac{\pi \rho_F g^2}{2c} \frac{\omega^3}{3 \omega_D^2} = \frac{\pi \lambda_{ep}}{3} \frac{\omega^3}{\omega_D^2},$$

idêntico ao resultado do cálculo direto do item (vi), inclusive no coeficiente. ✓

(ix) Temperatura finita: $\text{Im } \Sigma^A(k_F, 0)$ para $T \ll \omega_D$

Voltamos à Eq. (3) com as distribuições térmicas completas e tomamos a parte imaginária ($\text{Im}[1/(x - i\eta)] = \pi\delta(x)$), fazendo as integrais em ξ com os deltas $\delta(\omega - \xi \mp \nu)$:

$$\text{Im } \Sigma^A(k_F, \omega) = \pi \int_0^\infty d\nu \alpha^2 F(\nu) \left\{ [1 + n(\nu) - f(\omega - \nu)] + [n(\nu) + f(\omega + \nu)] \right\}.$$

Em $\omega = 0$, usando $f(-\nu) = 1 - f(\nu)$,

$$[1 + n(\nu) - f(-\nu)] + [n(\nu) + f(\nu)] = n(\nu) + f(\nu) + n(\nu) + f(\nu) = 2[n(\nu) + f(\nu)],$$

onde os dois termos correspondem a absorção de fônons térmicos (n) e a espalhamento por buracos/elétrons térmicos (f) — ambos proibidos em $T = 0$, por isso $\text{Im } \Sigma^A(k_F, 0)$ só é não nula em temperatura finita. Assim,

$$\begin{aligned}\text{Im } \Sigma^A(k_F, 0) &= 2\pi \int_0^{\omega_D} d\nu \frac{\rho_F g^2}{2c} \frac{\nu^2}{\omega_D^2} [n(\nu) + f(\nu)] \\ &= \frac{\pi \rho_F g^2}{c \omega_D^2} T^3 \int_0^{\omega_D/T} dx x^2 \left[\frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{e^x + 1} \right], \quad x = \frac{\nu}{T}.\end{aligned}$$

No regime $T \ll \omega_D$ o limite superior pode ser levado a infinito (o integrando decai como $x^2 e^{-x}$; o erro é $\mathcal{O}(e^{-\omega_D/T})$). As duas integrais adimensionais são conhecidas:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1} &= \Gamma(3) \zeta(3) = 2\zeta(3), \\ \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x + 1} &= \Gamma(3) \eta(3) = 2(1 - 2^{-2})\zeta(3) = \frac{3}{2} \zeta(3),\end{aligned}$$

onde $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ é a função eta de Dirichlet. Logo

$$\int_0^\infty dx x^2 [n_B(x) + f(x)] = 2\zeta(3) + \frac{3}{2}\zeta(3) = \frac{7\zeta(3)}{2} \approx 4,2072,$$

(verificado numericamente: a integral vale $4,20720 \dots = 7\zeta(3)/2$, com $\zeta(3) \approx 1,20206$). Portanto

$$\boxed{\text{Im } \Sigma^A(k_F, 0) = \frac{7\pi\zeta(3)}{2} \frac{\rho_F g^2}{c} \frac{T^3}{\omega_D^2} = 7\pi\zeta(3) \lambda_{ep} \frac{T^3}{\omega_D^2}, \quad T \ll \omega_D.}$$

A taxa de espalhamento térmica escala como T^3 — o análogo, para a vida média eletrônica, da famosa lei de Bloch–Grüneisen da resistividade em baixas temperaturas (lá o fator de transporte $1 - \cos \theta$ eleva a lei a T^5 ; aqui, sem esse fator, sobra T^3). Comparando com o item (vi), nota-se a correspondência $\omega \leftrightarrow T$ típica de um líquido de Fermi: $\text{Im } \Sigma^A \sim \lambda_{ep} \max(\omega, T)^3 / \omega_D^2$, com $\text{Im } \Sigma^A(k_F, 0) \ll T$ quando $T \rightarrow 0$, de modo que as quasi-partículas térmicas permanecem bem definidas.