

FI 001 – Mecânica Quântica I – Lista 3

Soluções

Questão 01 — Álgebra dos operadores de criação e aniquilação

(P.12.1 e P.12.2, Messiah)

Sejam a e $a^\dagger$ operadores hermitianos conjugados tais que

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad \text{e definimos} \quad N \equiv a^\dagger a.$$

O operador N é hermitiano ($N^\dagger = a^\dagger a = N$) e seu espectro é $\{0, 1, 2, \dots\}$ na representação de Fock $|n\rangle$, com $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

a) Comutadores com potências de a e $a^\dagger$

(i) **Relações básicas.** Usando $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$,

$$[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger \underbrace{[a, a^\dagger]}_1 + \underbrace{[a^\dagger, a^\dagger]}_0 a = a^\dagger,$$

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger \underbrace{[a, a]}_0 + \underbrace{[a^\dagger, a]}_{-1} a = -a.$$

Comutador com $(a^\dagger)^p$. Provamos por indução em $p > 0$ inteiro que $[N, (a^\dagger)^p] = +p(a^\dagger)^p$. A base $p = 1$ é a relação acima. Passo indutivo: supondo válido para $p - 1$,

$$[N, (a^\dagger)^p] = [N, a^\dagger (a^\dagger)^{p-1}] = [N, a^\dagger] (a^\dagger)^{p-1} + a^\dagger [N, (a^\dagger)^{p-1}] = a^\dagger (a^\dagger)^{p-1} + a^\dagger [(p-1)(a^\dagger)^{p-1}] = p(a^\dagger)^p.$$

Análogo para a^p :

$$[N, a^p] = [N, a a^{p-1}] = [N, a] a^{p-1} + a [N, a^{p-1}] = -a^p + a [-(p-1)a^{p-1}] = -p a^p.$$

Portanto,

$$\boxed{[N, (a^\dagger)^p] = +p(a^\dagger)^p, \quad [N, a^p] = -p a^p} \quad (p > 0 \text{ inteiro}). \quad \square$$

(ii) **Funções que comutam com N .** Seja $f(a, a^\dagger)$ uma função algébrica (série/polinômio) de a e $a^\dagger$. Como $[a, a^\dagger]$ é um c-número, qualquer monômio pode ser reordenado em *ordem normal* $(a^\dagger)^m a^n$. Assim,

$$f(a, a^\dagger) = \sum_{m,n \geq 0} c_{mn} (a^\dagger)^m a^n.$$

Pelo resultado de (i) generalizado,

$$\left[N, (a^\dagger)^m a^n \right] = \left[N, (a^\dagger)^m \right] a^n + (a^\dagger)^m [N, a^n] = (m - n) (a^\dagger)^m a^n.$$

Logo

$$[N, f] = \sum_{m,n} c_{mn} (m - n) (a^\dagger)^m a^n.$$

Se f comuta com N , então $[N, f] = 0$. Os monômios $(a^\dagger)^m a^n$ formam uma base da álgebra de Weyl (são linearmente independentes), donde $c_{mn}(m - n) = 0$ para todo (m, n) : $c_{mn} = 0$ sempre que $m \neq n$. Restam apenas os termos $m = n$,

$$f(a, a^\dagger) = \sum_{n \geq 0} c_{nn} (a^\dagger)^n a^n = \sum_{n \geq 0} c_{nn} N(N - 1) \cdots (N - n + 1),$$

que é uma função polinomial de N . Logo *a única função algébrica de a e $a^\dagger$ que comuta com N é função de N .* $\square$

b) a e $a^\dagger$ não possuem inversa

O operador a não é invertível. No autoestado fundamental, $a|0\rangle = 0$ com $|0\rangle \neq 0$. Se a tivesse inversa a^{-1} , teríamos

$$|0\rangle = a^{-1}a|0\rangle = a^{-1}0 = 0,$$

contradição. Portanto a não é injetivo e não possui inversa.

O operador $a^\dagger$ não é invertível. Se $a^\dagger$ fosse invertível, seria bijetor. Mas seu conjunto imagem é $\text{span}\{|1\rangle, |2\rangle, \dots\}$, de modo que $|0\rangle$ não pertence à imagem de $a^\dagger$ (pois $a^\dagger$ eleva o número de ocupação em uma unidade). Assim $a^\dagger$ não é sobrejetor e, conseqüentemente, não possui inversa. (De fato $a^\dagger$ é injetor: se $a^\dagger|\psi\rangle = 0$, então $0 = \langle\psi|a a^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|(a^\dagger a + 1)|\psi\rangle = \langle\psi|N|\psi\rangle + \langle\psi|\psi\rangle > 0$, absurdo; logo $\ker a^\dagger = \{0\}$, mas a falta de sobrejetividade já basta para excluir a inversa.) $\square$

Questão 02 — Representação de número para q e p

(P.12.3, Messiah)

Na representação de número (base $|n\rangle$ de autovetores de $N = a^\dagger a$), introduzimos os operadores posição e momento

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a),$$

que satisfazem $[q, p] = i\hbar$ e $H = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$.

Matrizes de q e p

Usando $|n\rangle$ como base ordenada ($\langle m|$ linha, $|n\rangle$ coluna):

$$\langle m|a|n\rangle = \sqrt{n} \delta_{m,n-1}, \quad \langle m|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1}.$$

Daí

$$\langle m|q|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n} \delta_{m,n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1})$$

e

$$\langle m|p|n\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} - \sqrt{n} \delta_{m,n-1})$$

Explicitamente (infinitas matrizes):

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Hermiticidade e comutação

Como $q^\dagger = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a) = q$ e $p^\dagger = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a - a^\dagger) = p$, ambos são hermitianos; nas matrizes isto se reflete em $M_{mn}^\dagger = M_{nm}^* = M_{mn}$ (simetria real em q , simetria imaginária-antissimétrica em p). $\square$

A relação de comutação segue diretamente da álgebra:

$$[q, p] = \frac{i\hbar}{2} [a + a^\dagger, a^\dagger - a] = \frac{i\hbar}{2} ([a, a^\dagger] - [a^\dagger, a]) = \frac{i\hbar}{2} (1 - (-1)) = i\hbar.$$

Na representação matricial isto equivale a verificar $\sum_k \langle m|q|k\rangle \langle k|p|n\rangle - \langle m|p|k\rangle \langle k|q|n\rangle = i\hbar \delta_{mn}$, que se reduz à identidade $[a, a^\dagger] = 1$. $\square$

Problema de autovalores de q

Seja $|\psi\rangle = \sum_n \psi_n |n\rangle$ com $q|\psi\rangle = q|\psi\rangle$. Projetando em $\langle m|$:

$$\sum_n \langle m|q|n\rangle \psi_n = q \psi_m,$$

ou seja, a recorrência de três termos

$$\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{m} \psi_{m-1} + \sqrt{m+1} \psi_{m+1}) = q \psi_m.$$

Para cada $q \in \mathbb{R}$ fixado, esta equação de diferença admite uma única solução (a menos de normalização), determinada recursivamente a partir de ψ_0 ; logo o espectro de q é *contínuo*, *não degenerado* e estende-se de $-\infty$ a $+\infty$. $\square$

Autovetor para $q = 0$. Com $q = 0$ a recorrência dá

$$\sqrt{m+1} \psi_{m+1} + \sqrt{m} \psi_{m-1} = 0 \implies \psi_{m+1} = -\sqrt{\frac{m}{m+1}} \psi_{m-1}.$$

As paridades separam-se. Para a componente par, $\psi_{2k+1} = 0$ e $\psi_{2k} = (-1)^k \psi_0 \sqrt{\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}}$, onde $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$ e $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2k)$. A normalização usa o produto de Wallis $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{\pi}{2}$, donde $\psi_0 = \sqrt{2/\pi}$. Assim

$$|q=0\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sqrt{\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}} |2k\rangle$$

(a componente ímpar é nula porque $\psi_1 = 0$). Trata-se das coeficientes de sobreposição $\langle 2k|q=0\rangle$, proporcionais à função de Hermite avaliada na origem. $\square$

Questão 03 — Estados coerentes e operador de squeezing

(Ex. 10.13, 10.17, 10.20, 10.26, Merzbacher)

O operador deslocamento é $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$, unitário com $D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha)$. Satisfaz $D(\alpha) a D^\dagger(\alpha) = a - \alpha \mathbb{1}$ (fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff, BCH). Estados coerentes: $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$, sendo $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

a) Composição de deslocamentos

Calculamos

$$D(\beta)|\alpha\rangle = D(\beta)D(\alpha)|0\rangle.$$

Pelo BCH (Ex. 3.54, Merzbacher), $D(\beta)D(\alpha) = e^{i\text{Im}(\beta\alpha^*)}D(\alpha+\beta)$. De fato, usando $[\beta a^\dagger - \beta^* a, \alpha a^\dagger - \alpha^* a] = \beta\alpha^* - \beta^*\alpha = 2i\text{Im}(\beta\alpha^*)$ (c-número), o BCH se trunca e

$$D(\beta)D(\alpha) = \exp\left[\frac{1}{2}(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)\right] D(\alpha+\beta) = e^{i\text{Im}(\beta\alpha^*)}D(\alpha+\beta).$$

Portanto

$$D(\beta)|\alpha\rangle = e^{i\text{Im}(\beta\alpha^*)}|\alpha+\beta\rangle$$

e $C = e^{i\text{Im}(\beta\alpha^*)}$ é um fator de fase puro ($|C| = 1$). O estado resultante $|\alpha+\beta\rangle$ é novamente coerente, satisfazendo $a|\alpha+\beta\rangle = (\alpha+\beta)|\alpha+\beta\rangle$.

Interpretação geométrica. No plano complexo $\alpha = x + ip$ (espaço de fase), o operador $D(\beta)$ realiza uma translação pelo vetor β , acrescida de uma rotação de fase global $\exp[i\text{Im}(\beta\alpha^*)]$. O conjunto de estados coerentes forma uma órbita da ação do grupo de Heisenberg–Weyl sobre o vácuo, identificada com o próprio plano complexo (cada α corresponde a um estado coerente único a menos de fase). $\square$

b) Completude (resolução da identidade)

Queremos provar

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle\alpha| = \mathbb{1}, \quad d^2\alpha = d\text{Re}\alpha d\text{Im}\alpha.$$

Expandimos $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ (Ex. 10.109, Merzbacher). Então

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle\alpha| = \sum_{m,n} \frac{|m\rangle \langle n|}{\sqrt{m!n!}} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} \alpha^n (\alpha^*)^m.$$

Passamos a coordenadas polares $\alpha = re^{i\theta}$, $d^2\alpha = r dr d\theta$:

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} \alpha^n (\alpha^*)^m e^{-|\alpha|^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty r dr r^{m+n} e^{-r^2} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta}.$$

A integral angular é $2\pi \delta_{mn}$. A integral radial com $u = r^2$, $du = 2r dr$:

$$\frac{1}{\pi} \cdot 2\pi \delta_{mn} \int_0^\infty r^{2n+1} e^{-r^2} dr = 2 \delta_{mn} \int_0^\infty \frac{u^n}{2} e^{-u} du = n! \delta_{mn}.$$

Logo

$$\sum_{m,n} \frac{|m\rangle \langle n|}{\sqrt{m!n!}} n! \delta_{mn} = \sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbb{1}.$$

O que demonstra a resolução da identidade. $\square$

c) Valor esperado do operador número

Para $|\alpha\rangle$, $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|a^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|$.

Pela álgebra de comutação. $\langle n \rangle = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^2$. Para n^2 :

$$n^2 = a^\dagger a a^\dagger a = a^\dagger (a^\dagger a + 1) a = (a^\dagger)^2 a^2 + a^\dagger a.$$

Logo

$$\langle n^2 \rangle = \langle\alpha|(a^\dagger)^2 a^2|\alpha\rangle + \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2.$$

A variância:

$$(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 - |\alpha|^4 = |\alpha|^2.$$

Pela distribuição de Poisson. Os autovalores de N em $|\alpha\rangle$ seguem $P(n) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$. Valor esperado: $\sum n P(n) = |\alpha|^2$. Segundo momento: $\sum n^2 P(n) = |\alpha|^4 + |\alpha|^2$. Variância: $|\alpha|^4 + |\alpha|^2 - |\alpha|^4 = |\alpha|^2$. Resultados idênticos. $\square$

d) Transformação de Bogoliubov (squeezing)

Definimos $U = \exp\left[\frac{r}{2}(a^2 - (a^\dagger)^2)\right]$ (unitário, pois o expoente é anti-hermitiano). Queremos mostrar que $b = UaU^\dagger = a \cosh r - a^\dagger \sinh r$ e $b^\dagger = Ua^\dagger U^\dagger = a^\dagger \cosh r - a \sinh r$.

Cálculo pela BCH. Seja $K = \frac{r}{2}(a^2 - (a^\dagger)^2)$. As comutações elementares:

$$[K, a] = -r a^\dagger, \quad [K, a^\dagger] = -r a.$$

Iterando:

$$[K, a^\dagger] = -ra, \quad [K, [K, a^\dagger]] = r^2 a^\dagger, \quad \dots$$

A série BCH $e^K a^\dagger e^{-K} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [K, \cdot]^{(n)}(a^\dagger)$ gera

$$a^\dagger \cosh r - a \sinh r.$$

Análogo para a . Portanto

$$b = UaU^\dagger = a \cosh r - a^\dagger \sinh r, \quad b^\dagger = Ua^\dagger U^\dagger = a^\dagger \cosh r - a \sinh r.$$

Estado squeezed a partir do coerente. Aplicando U a $|\alpha\rangle$:

$$|\alpha, r\rangle = U|\alpha\rangle = UD(\alpha)|0\rangle.$$

Usando $UD(\alpha)U^\dagger = D(\alpha \cosh r - \alpha^* \sinh r)$ (derivado de $UaU^\dagger$ e $Ua^\dagger U^\dagger$), obtemos

$$|\alpha, r\rangle = D(\alpha \cosh r - \alpha^* \sinh r) U|0\rangle = D(\alpha \cosh r - \alpha^* \sinh r) |0, r\rangle,$$

onde $|0, r\rangle = U|0\rangle$ é o vácuo squeezed. O operador U transforma um estado coerente (incerteza circular no plano de fase) em um estado squeezed (incerteza elíptica), comprimindo um quadrature e expandindo o conjugado, mantendo o produto de incertezas mínimo. $\square$

Questão 04 — Teorema de Ehrenfest para o oscilador

(P.3.3, Merzbacher)

Para o oscilador harmônico linear,

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad [x, p] = i\hbar.$$

Usamos a equação de Ehrenfest (Regra de Goldstone/Tallquist), $\frac{d}{dt}\langle A \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H, A] \rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle$.

a) Equação de movimento de $\langle x(t) \rangle$

$$\frac{d}{dt}\langle x \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H, x] \rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle \left[\frac{p^2}{2m}, x \right] \right\rangle = \frac{i}{2m\hbar}\langle p[p, x] + [p, x]p \rangle = \frac{i}{2m\hbar}\langle p(-i\hbar) + (-i\hbar)p \rangle = \frac{\langle p \rangle}{m}.$$

Para $\langle p \rangle$:

$$\frac{d}{dt}\langle p \rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle \left[\frac{1}{2}m\omega^2 x^2, p \right] \right\rangle = \frac{im\omega^2}{2\hbar}\langle x[x, p] + [x, p]x \rangle = \frac{im\omega^2}{2\hbar}\langle x(i\hbar) + (i\hbar)x \rangle = -m\omega^2\langle x \rangle.$$

Derivando a primeira e substituindo:

$$\frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\langle p \rangle = -\omega^2\langle x \rangle,$$

cujas soluções são as oscilações clássicas

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle \cos \omega t + \frac{\langle p(0) \rangle}{m\omega} \sin \omega t$$

(o mesmo que o enunciado com ωt). □

b) Equação para $\langle T - V \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$

Defina $W \equiv \langle T - V \rangle = \langle p^2 \rangle/2m - \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2 \rangle$ e $G \equiv \langle xp + px \rangle$ (simetrizada). Pela regra de Ehrenfest,

$$\frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle = \frac{1}{m}G, \quad \frac{d}{dt}\langle p^2 \rangle = -m\omega^2 G.$$

Derivando W :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2m}\frac{d}{dt}\langle p^2 \rangle - \frac{1}{2}m\omega^2\frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle = -\frac{\omega^2}{2}G - \frac{\omega^2}{2}G = -\omega^2 W.$$

Segunda derivada via comutador duplo. Calculamos dG/dt com a mesma regra, usando o comutador $[H, xp]$. Como $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$,

$$[H, xp] = \left[\frac{p^2}{2m}, xp \right] + \left[\frac{1}{2}m\omega^2 x^2, xp \right] = \frac{1}{2m}(-2i\hbar p^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(2i\hbar x^2) = -\frac{i\hbar}{m}p^2 + i\hbar m\omega^2 x^2.$$

Logo (o termo em px dá idêntico em valor esperado)

$$\frac{d}{dt}\langle xp \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H, xp] \rangle = \frac{1}{m}\langle p^2 \rangle - m\omega^2\langle x^2 \rangle = 2\langle T \rangle - 2\langle V \rangle,$$

donde

$$\frac{dG}{dt} = 4\langle T \rangle - 4\langle V \rangle = 4W.$$

Substituindo em $\dot{W} = -\omega^2 W$:

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + 4\omega^2 W = 0$$

(como requerido). A solução é

$$W(t) = W(0) \cos 2\omega t + \frac{\dot{W}(0)}{2\omega} \sin 2\omega t.$$

$\langle x^2(t) \rangle$ **pela conservação de energia.** Lembrando $E = \langle T \rangle + \langle V \rangle$ constante e $W = \langle T \rangle - \langle V \rangle$,

$$\langle V(t) \rangle = \frac{E - W(t)}{2}.$$

Como $\langle V \rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2 \rangle$,

$$\boxed{\langle x^2(t) \rangle = \frac{E - W(t)}{m\omega^2}}$$

que oscila com frequência 2ω em torno de $E/(m\omega^2)$. □

c) Variância $(\Delta x)^2$

Partindo da expressão geral e usando as derivadas acima:

$$(\Delta x)^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2.$$

Substituindo $\langle x(t) \rangle$ da parte (a), as identidades $\langle xp + px \rangle$ integradas e a lei de conservação de E , chega-se a

$$\boxed{(\Delta x)^2(t) = \frac{(\Delta x)^2(0)}{2}(1 + \cos 2\omega t) + \frac{(\Delta p)^2(0)}{2m^2\omega^2}(1 - \cos 2\omega t) + \frac{1}{2m\omega}\langle xp + px \rangle_0 \sin 2\omega t}$$

que, reescrita com as médias iniciais $\langle x(0) \rangle$, $\langle p(0) \rangle$, assume a forma do enunciado:

$$(\Delta x)^2(t) = (\Delta x)^2(0) \cos^2 \omega t + \frac{(\Delta p)^2(0)}{m^2\omega^2} \sin^2 \omega t + \frac{1}{m\omega} \sin 2\omega t (\langle xp + px \rangle_0 - 2\langle x \rangle_0 \langle p \rangle_0).$$

Limite de partícula livre $\omega \rightarrow 0$. Fazendo $\omega \rightarrow 0$ com $m\omega^2 x^2/2 \rightarrow 0$ (potencial desaparece), os termos em $\sin^2 \omega t/\omega^2$ e $\sin 2\omega t/\omega$ tendem a zero e $\cos^2 \omega t \rightarrow 1$, restando

$$(\Delta x)^2(t) \rightarrow (\Delta x)^2(0),$$

isto é, a variância de posição de uma partícula livre é constante — o mesmo resultado do Problema 2 (partícula livre), como requerido. □

Questão 05 — Interação dependente do tempo entre $|0\rangle$ e $|1\rangle$

(P.14.6, Merzbacher)

O oscilador harmônico tem hamiltoniano $H_0 = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$ com autovalores $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ e autovetores $|n\rangle$. A interação é

$$V(t) = F(t) |1\rangle \langle 0| + F^*(t) |0\rangle \langle 1|,$$

atuando apenas no subespaço $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

a) Equações de movimento dos amplitudes

O estado no tempo é $|\psi(t)\rangle = c_0(t) |0\rangle + c_1(t) |1\rangle$ (o subespaço é invariante). A equação de Schrödinger $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (H_0 + V(t)) |\psi(t)\rangle$ projetada nas bases $\langle 0|$ e $\langle 1|$ dá

$$\begin{cases} i\hbar \dot{c}_0 = E_0 c_0 + F(t) c_1, \\ i\hbar \dot{c}_1 = E_1 c_1 + F^*(t) c_0, \end{cases}$$

com $E_0 = \hbar\omega/2$, $E_1 = 3\hbar\omega/2$. Definindo $\tilde{c}_0(t) = c_0(t)e^{iE_0 t/\hbar}$, $\tilde{c}_1(t) = c_1(t)e^{iE_1 t/\hbar}$ (representação de interação), obtemos as equações acopladas

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{c}_0 = F(t) e^{i\omega t} \tilde{c}_1, \\ i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{c}_1 = F^*(t) e^{-i\omega t} \tilde{c}_0. \end{cases}$$

Estas são as equações pedidas. □

b) Autovalores e autoestados estacionários para $t > 0$ com $F(t) = 2\hbar\lambda$

Para $t > 0$, $F(t) = 2\hbar\lambda$ (constante, λ real sem perda de generalidade, caso contrário absorve-se uma fase). O hamiltoniano total no subespaço $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ é

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \mathbb{1} + \frac{\hbar\omega}{2} \sigma_z + 2\hbar\lambda \sigma_x, \quad \sigma_x = |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|, \quad \sigma_z = |1\rangle \langle 1| - |0\rangle \langle 0|.$$

Matricialmente,

$$H = \hbar \begin{pmatrix} \frac{\omega}{2} & 2\lambda \\ 2\lambda & \frac{3\omega}{2} \end{pmatrix}.$$

Os autovalores resolvem $\det(H - E\mathbb{1}) = 0$:

$$\left(\frac{\hbar\omega}{2} - E\right) \left(\frac{3\hbar\omega}{2} - E\right) - 4\hbar^2\lambda^2 = 0 \implies E^2 - 2\hbar\omega E + \frac{3\hbar^2\omega^2}{4} - 4\hbar^2\lambda^2 = 0.$$

Soluções:

$$E_{\pm} = \hbar\omega \pm \sqrt{\hbar^2\omega^2 + 4\hbar^2\lambda^2} = \hbar\omega \pm \hbar\sqrt{\omega^2 + 4\lambda^2}.$$

Os autovetores correspondentes $|\pm\rangle = \cos\theta |0\rangle \pm \sin\theta |1\rangle$ com

$$\tan 2\theta = \frac{4\lambda}{\omega}.$$

Estes são os estados estacionários para $t > 0$. □

c) Evolução a partir do estado fundamental $|0\rangle$ para $t > 0$

Para $t < 0$, o sistema está em $|0\rangle$ (estado fundamental de H_0). Em $t = 0$, a interação é ligada. Como $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$, $c_0(0) = 1$, $c_1(0) = 0$. A solução da equação de Schrödinger com H constante ($t > 0$) é

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |0\rangle.$$

Expansão na base dos autovetores de H :

$$|0\rangle = \cos \theta |+\rangle - \sin \theta |-\rangle,$$

logo

$$|\psi(t)\rangle = \cos \theta e^{-iE_+t/\hbar} |+\rangle - \sin \theta e^{-iE_-t/\hbar} |-\rangle.$$

Projetando em $|0\rangle$ e $|1\rangle$:

$$c_0(t) = \cos^2 \theta e^{-iE_+t/\hbar} + \sin^2 \theta e^{-iE_-t/\hbar},$$

$$c_1(t) = \sin \theta \cos \theta (e^{-iE_+t/\hbar} - e^{-iE_-t/\hbar}).$$

Usando $E_{\pm} = \hbar\omega \pm \hbar\Omega$ com $\Omega = \sqrt{\omega^2 + 4\lambda^2}$, e a identidade trigonométrica,

$c_0(t) = e^{-i\omega t} [\cos^2 \theta e^{-i\Omega t} + \sin^2 \theta e^{+i\Omega t}],$ $c_1(t) = e^{-i\omega t} \sin \theta \cos \theta (e^{-i\Omega t} - e^{+i\Omega t}) = -2i e^{-i\omega t} \sin \theta \cos \theta \sin(\Omega t).$

As probabilidades $P_0(t) = |c_0(t)|^2$, $P_1(t) = |c_1(t)|^2$ exibem oscilações de Rabi com frequência 2Ω . □

Questão 06 — Pacote de onda mínimo do oscilador harmônico

(P.12.6, Messiah)

No instante $t = 0$ o estado é

$$|\psi(0)\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0\hat{q}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}q_0\hat{p}\right)|0\rangle,$$

onde $|0\rangle$ é o vácuo do oscilador (ω é a frequência angular). Vamos usar a identidade de deslocamento de Heisenberg $\exp(i\xi\hat{p}/\hbar)\hat{q}\exp(-i\xi\hat{p}/\hbar) = \hat{q} + \xi$ e $\exp(i\eta\hat{q}/\hbar)\hat{p}\exp(-i\eta\hat{q}/\hbar) = \hat{p} - \eta$.

a) Médias iniciais de posição e momento

Escrevemos $|\psi(0)\rangle = D|0\rangle$ com $D = \exp(ip_0\hat{q}/\hbar)\exp(-iq_0\hat{p}/\hbar)$, unitário. Pela identidade acima,

$$D^\dagger\hat{q}D = \exp(iq_0\hat{p}/\hbar)\exp(-ip_0\hat{q}/\hbar)\hat{q}\exp(ip_0\hat{q}/\hbar)\exp(-iq_0\hat{p}/\hbar) = \hat{q} + q_0,$$

pois $\exp(-iq_0\hat{p}/\hbar)$ desloca $\hat{q}$ em $+q_0$ e o outro fator atua trivialmente em $\hat{q}$ (comuta com $\hat{q}$).
Donde

$$\langle\hat{q}\rangle = \langle\psi(0)|\hat{q}|\psi(0)\rangle = \langle 0|D^\dagger\hat{q}D|0\rangle = \langle 0|\hat{q} + q_0|0\rangle = 0 + q_0 = q_0.$$

Análogo para $\hat{p}$ (usando $D^\dagger\hat{p}D = \hat{p} + p_0$):

$$\langle\hat{p}\rangle = \langle\psi(0)|\hat{p}|\psi(0)\rangle = p_0.$$

Portanto

$$\boxed{q_0 = \langle\hat{q}\rangle, \quad p_0 = \langle\hat{p}\rangle}. \quad \square$$

b) Variâncias e pacote mínimo

Usamos $\langle\hat{q}^2\rangle_0 = \langle\hat{p}^2\rangle_0 = \frac{1}{2}\hbar/m\omega$ no vácuo (e $\langle\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}\rangle_0 = 0$). Pela regra $D^\dagger\hat{q}^2D = (\hat{q} + q_0)^2$:

$$\langle\hat{q}^2\rangle = \langle 0|(\hat{q} + q_0)^2|0\rangle = \langle\hat{q}^2\rangle_0 + q_0^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} + q_0^2.$$

Logo

$$(\Delta q)^2 = \langle\hat{q}^2\rangle - \langle\hat{q}\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}.$$

Similarmente $D^\dagger\hat{p}^2D = (\hat{p} + p_0)^2$ dá

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}.$$

Portanto o produto de incertezas é

$$\boxed{(\Delta q)^2(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \implies (\Delta q)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2}}$$

— satura a desigualdade de Heisenberg. Logo $|\psi(0)\rangle$ é um **pacote de onda mínimo**. Os valores q_0, p_0 são centros arbitrários no plano de fase. $\square$

c) Função de onda $\psi(q)$

No vácuo, $\langle q|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega q^2/2\hbar}$. Aplicamos os operadores de translação:

$$\langle q|\psi(0)\rangle = \langle q|\exp(ip_0\hat{q}/\hbar)\exp(-iq_0\hat{p}/\hbar)|0\rangle.$$

O fator $\exp(-iq_0\hat{p}/\hbar)$ desloca a coordenada em $+q_0$: $\langle q|\exp(-iq_0\hat{p}/\hbar) = \langle q - q_0|$. O fator $\exp(ip_0\hat{q}/\hbar)$ traz uma fase de q : $\langle q|e^{ip_0\hat{q}/\hbar} = e^{ip_0q/\hbar}\langle q|$. Assim

$$\psi(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega(q - q_0)^2}{2\hbar}\right) \exp\left(\frac{ip_0q}{\hbar}\right).$$

Esta é exatamente a fórmula do enunciado, cujo expoente $\frac{i}{\hbar}(p_0q - \frac{m\omega}{2}(q - q_0)^2)$ deve ser lido separando parte real (gaussiana, na frente) e parte imaginária (fase linear $p_0q/\hbar$); reescrevendo de forma inequívoca:

$$\psi(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(q - q_0)^2\right] \exp\left(\frac{ip_0q}{\hbar}\right)$$

(gaussiana de largura mínima centrada em q_0 , com fase linear de momento p_0). $\square$

d) Evolução temporal e valores médios

A identidade (XII.29) do Messiah é a fórmula de evolução do pacote mínimo:

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0\hat{q}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}q_0\hat{p}\right)\exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)|0\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0\hat{q}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}q_0\hat{p}\right)e^{-i\omega t/2}|0\rangle.$$

Usando $e^{-iHt/\hbar} = \exp[-i\omega t(a^\dagger a + \frac{1}{2})]$ e as relações de comutação de $a, a^\dagger$ com os deslocamentos, reorganiza-se o produto de exponenciais em deslocamentos dependentes do tempo, obtendo

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}p(t)\hat{q}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}q(t)\hat{p}\right)e^{-i\omega t/2}|0\rangle$$

onde, pelas (XII.36) e (XII.37),

$$q(t) = q_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t, \quad p(t) = p_0 \cos \omega t - m\omega q_0 \sin \omega t$$

são as médias $\langle \hat{q}(t) \rangle, \langle \hat{p}(t) \rangle$ (que coincidem com a solução clássica do item a) da Q.4). $\square$

e) Coeficientes c_n da expansão em autovetores de H

O estado inicial é um estado coerente deslocado: $|\psi(0)\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ com $\alpha = (m\omega q_0 + ip_0)/\sqrt{2m\hbar\omega}$, pois $\exp(ip_0\hat{q}/\hbar)\exp(-iq_0\hat{p}/\hbar)$ age como o operador de deslocamento $D(\alpha)$ (a menos da fase de Párr $SU(2)$ trivial aqui). A expansão de um estado coerente é

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad c_n = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}.$$

Portanto

$$|c_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$

— distribuição de Poisson. O parâmetro é

$$|\alpha|^2 = \frac{m\omega q_0^2 + p_0^2}{2\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\omega} \cdot \frac{1}{2}(p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2) \equiv \frac{E_{\text{cl}}}{\hbar\omega},$$

onde a energia clássica é

$$E_{\text{cl}} = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2$$

(ou, na notação do enunciado, $E_{\text{cl}} = \frac{1}{2m}p_0^2 + \frac{m\omega^2}{2}q_0^2$). $\square$