

FI 001 – Mecânica Quântica I – Lista 5

Soluções

Questão 01 — Matrizes de Pauli, spinores e rotações (Merzbacher 16.9–16.19)

(Ex. 16.9, 16.10, 16.11, 16.12 e 16.19, Merzbacher)

Denotamos por $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ o vetor cujas componentes são as matrizes de Pauli e usamos as propriedades fundamentais (Merzbacher (16.54)–(16.55))

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \sigma_i^2 = \mathbb{1},$$

além de $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ser hermitiano e satisfazer $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbb{1}$ para $\hat{\mathbf{n}}$ real unitário.

a) Autovalores e autospinores de $A = \sigma_0 \mathbb{1} + \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \boldsymbol{\sigma}$

Sejam $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ os coeficientes reais da expansão de uma matriz 2×2 genérica

$$A = \sigma_0 \mathbb{1} + \sigma_1 \sigma_x + \sigma_2 \sigma_y + \sigma_3 \sigma_z \equiv \sigma_0 \mathbb{1} + \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma}_c \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

Para obter os autovalores, calculamos A^2 usando $(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbb{1} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (identidade que provaremos no item (c); aqui basta tomá-la com $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \boldsymbol{\sigma}_c$):

$$(\boldsymbol{\sigma}_c \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \boldsymbol{\sigma}_c^2 \mathbb{1} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_c \times \boldsymbol{\sigma}_c) = |\boldsymbol{\sigma}_c|^2 \mathbb{1}.$$

Logo

$$A^2 = (\sigma_0 \mathbb{1})^2 + 2\sigma_0(\boldsymbol{\sigma}_c \cdot \boldsymbol{\sigma}) + (\boldsymbol{\sigma}_c \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = (\sigma_0^2 + |\boldsymbol{\sigma}_c|^2) \mathbb{1} + 2\sigma_0(\boldsymbol{\sigma}_c \cdot \boldsymbol{\sigma}).$$

Subtraindo $2\sigma_0 A = 2\sigma_0^2 \mathbb{1} + 2\sigma_0(\boldsymbol{\sigma}_c \cdot \boldsymbol{\sigma})$, vem

$$A^2 - 2\sigma_0 A - |\boldsymbol{\sigma}_c|^2 \mathbb{1} = 0.$$

Assim todo autovalor λ de A satisfaz $\lambda^2 - 2\sigma_0 \lambda - |\boldsymbol{\sigma}_c|^2 = 0$, donde

$$\boxed{\lambda_{\pm} = \sigma_0 \pm |\boldsymbol{\sigma}_c|}, \quad |\boldsymbol{\sigma}_c| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}.$$

Autospinores. Para $\lambda_{\pm} = \sigma_0 \pm |\boldsymbol{\sigma}_c|$, a equação de autovalor $A\chi_{\pm} = \lambda_{\pm}\chi_{\pm}$ reduz-se a

$$(\boldsymbol{\sigma}_c \cdot \boldsymbol{\sigma}) \chi_{\pm} = \pm |\boldsymbol{\sigma}_c| \chi_{\pm}.$$

Portanto $\chi_{\pm}$ são os autospinores de $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ com autovalor ± 1 , onde $\hat{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\sigma}_c / |\boldsymbol{\sigma}_c|$.

Caso especial $\sigma_0 = 0$ e $\sigma_c = \hat{\mathbf{n}}$ (unitário). Então $A = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ e os autovalores são $\lambda_{\pm} = \pm 1$. Escrevendo

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix},$$

a equação $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\chi_+ = \chi_+$ dá $(1 - n_z)a = (n_x - in_y)b$, donde $b/a = (1 - n_z)/(n_x - in_y) = (n_x + in_y)/(1 + n_z)$. Normalizando,

$$\chi_+(\hat{\mathbf{n}}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+n_z}{2}} \\ \frac{n_x + in_y}{\sqrt{2(1+n_z)}} \end{pmatrix}$$

Analogamente, $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\chi_- = -\chi_-$ fornece

$$\chi_-(\hat{\mathbf{n}}) = \begin{pmatrix} -\frac{n_x - in_y}{\sqrt{2(1+n_z)}} \\ \sqrt{\frac{1+n_z}{2}} \end{pmatrix}$$

que são exatamente as fórmulas do enunciado (equiv. com $(n_x - in_y)/\sqrt{1+n_z}$ no numerador apropriado). $\square$

b) Unitariedade de $U = \exp[i\varphi(\mathbb{1} \cos \alpha + i \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \alpha)]$

(No PDF o parâmetro real que multiplica o parênteses – aqui denotado φ – não aparece na OCR; a matriz é unitária para qualquer ângulo real φ, α e vetor real unitário $\hat{\mathbf{n}}$.)

O expoente é

$$i\varphi(\mathbb{1} \cos \alpha + i \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \alpha) = i(\varphi \cos \alpha)\mathbb{1} - (\varphi \sin \alpha)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}).$$

Como $\mathbb{1}$ e $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ são hermitianos e comutam, definimos o operador hermitiano

$$H \equiv \varphi \cos \alpha \mathbb{1} - \varphi \sin \alpha (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad \text{de modo que} \quad U = e^{iH}.$$

Todo operador da forma e^{iH} com $H = H^\dagger$ é unitário, pois

$$U^\dagger U = e^{-iH^\dagger} e^{iH} = e^{-iH} e^{iH} = e^0 = \mathbb{1}.$$

Alternativamente, fatorando, $U = e^{i\varphi \cos \alpha} e^{-i\varphi \sin \alpha \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}$, produto de uma fase (unitária) por um operador da forma $e^{-i\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}$ (que é unitário porque $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ é hermitiano). Portanto U é unitária. $\square$

c) Identidade $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ vetores (ou operadores) que comutam com $\boldsymbol{\sigma}$. Então $\sigma_i A_j = A_j \sigma_i$ e podemos reordenar livremente:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \sum_{i,j} \sigma_i A_i \sigma_j B_j = \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j A_i B_j.$$

Usando a relação de fechamento $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$,

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \sum_{i,j} \delta_{ij} A_i B_j \mathbb{1} + i \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \sigma_k A_i B_j = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbb{1} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

pois $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} A_i B_j$. $\square$

d) Rotação do operador-vetor de Pauli: $U_R \sigma U_R^\dagger$

O operador de rotação de spin-1/2 (Eq. (16.62)) é

$$U_R = \exp\left(-i\frac{\theta}{2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right).$$

Como $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbb{1}$, a exponencial fecha numa série de seno/cosseno:

$$U_R = \cos \frac{\theta}{2} \mathbb{1} - i \sin \frac{\theta}{2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad U_R^\dagger = \cos \frac{\theta}{2} \mathbb{1} + i \sin \frac{\theta}{2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}).$$

Calculando a componente i ,

$$U_R \sigma_i U_R^\dagger = \cos^2 \frac{\theta}{2} \sigma_i + i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} [\sigma_i, \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}] + \sin^2 \frac{\theta}{2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sigma_i (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}).$$

O comutador vale $[\sigma_i, \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}] = 2i \sum_k \varepsilon_{ijk} n_k \sigma_k = 2i(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma})_i$, donde o termo do meio é $2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma})_i = \sin \theta (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma})_i$. Para o último termo, usando $\sigma_i (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = n_i \mathbb{1} + i \sum_k \varepsilon_{ijk} n_k \sigma_k$ e $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbb{1}$, obtém-se

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sigma_i (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = 2n_i (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \sigma_i = n_i (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma})]_i,$$

onde usamos a identidade vetorial $\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma}) = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma}$. Reunindo em forma vetorial:

$$U_R \boldsymbol{\sigma} U_R^\dagger = \cos^2 \frac{\theta}{2} \boldsymbol{\sigma} + \sin \theta (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma}) + \sin^2 \frac{\theta}{2} [\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma})].$$

Substituindo $\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma}) = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma}$,

$$\begin{aligned} U_R \boldsymbol{\sigma} U_R^\dagger &= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \boldsymbol{\sigma} + \sin \theta (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma}) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\ &= \cos \theta \boldsymbol{\sigma} + \sin \theta (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma}) + (1 - \cos \theta) \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\ &= \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \cos \theta \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma}) + \sin \theta (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\sigma}), \end{aligned}$$

que é a fórmula de Rodrigues para a rotação do vetor-operador $\boldsymbol{\sigma}$ de um ângulo θ em torno de $\hat{\mathbf{n}}$. $\square$

e) Vetor de polarização P , rotação para $(1\ 0)^T$ e probabilidade $p_{\hat{\mathbf{n}}}$

Dado o spinor

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\beta} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \langle\psi| = (a^*, b^*),$$

o vetor de polarização é $P_i = \langle\psi|\sigma_i|\psi\rangle$.

$$P_z = |a|^2 - |b|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta,$$

$$P_x = a^* b + b^* a = e^{-i\alpha} e^{i\beta} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + e^{-i\beta} e^{i\alpha} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = \sin \theta \cos(\beta - \alpha),$$

$$P_y = -ia^* b + ib^* a = i(b^* a - a^* b) = \sin \theta \sin(\beta - \alpha).$$

Portanto

$$\mathbf{P} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad \phi \equiv \beta - \alpha,$$

vetor unitário (verifica-se $|\mathbf{P}| = 1$). Fisicamente, $|\psi\rangle$ é o estado com spin “para cima” ao longo de $\mathbf{P}$.

Matriz U_R que leva $|\psi\rangle$ em $(1\ 0)^T$. O spinor com polarização $\mathbf{P}$ (ângulo polar θ , azimute ϕ) é, a uma fase global près, $\chi_+(\mathbf{P})$. A rotação que leva $|+\rangle_z = (1, 0)^T$ nesse estado é $R_z(\phi)R_y(\theta)$; a inversa (que devolve $|\psi\rangle$ a $(1, 0)^T$) é

$$U_R = \exp\left(i\frac{\theta}{2}\sigma_y\right) \exp\left(i\frac{\phi}{2}\sigma_z\right)$$

(igual ao resultado a menos de uma fase global $e^{i(\alpha+\phi/2)}$). Explicitamente:

$$\exp\left(i\frac{\phi}{2}\sigma_z\right) = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad \exp\left(i\frac{\theta}{2}\sigma_y\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

donde

$$U_R = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} & \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} & \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad U_R |\psi\rangle = e^{i(\alpha+\phi/2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Probabilidade $p_{\hat{\mathbf{n}}}$ de medir polarização $\hat{\mathbf{n}}$. O estado de spin-1/2 de polarização $\mathbf{P}$ tem matriz densidade $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma})$; o projetor sobre o estado de polarização $\hat{\mathbf{n}}$ é $\Pi_{\hat{\mathbf{n}}} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})$. Assim

$$p_{\hat{\mathbf{n}}} = \text{Tr}(\Pi_{\hat{\mathbf{n}}} \rho) = \frac{1}{4} \text{Tr}[(\mathbb{1} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbb{1} + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma})].$$

Usando $\text{Tr}(\mathbb{1}) = 2$, $\text{Tr}(\sigma_i) = 0$ e $\text{Tr}[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma})] = \text{Tr}[\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} \mathbb{1} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{P})] = 2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}$,

$$p_{\hat{\mathbf{n}}} = \frac{1}{4}(2 + 2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}) = \boxed{\frac{1}{2}(1 + \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}})}.$$

Verificação nos casos limite.

- $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P}$: $p = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$ (certeza de encontrar a mesma polarização).
- $\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{P}$: $p = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$ (estado ortogonal, probabilidade nula).
- $\hat{\mathbf{n}} \perp \mathbf{P}$: $p = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}$ (resultado máximo de incerteza, como para uma medida num eixo transversal).

Todos concordam com as expectativas. □

Questão 02 — Sistema de káons neutros K^0 - $\bar{K}^0$ (Merzbacher 16.1)

(P.16.1, Merzbacher)

O espaço de estados é o espaço de spin-1/2 com base própria de σ_z :

$$|+\rangle = |K^0\rangle, \quad |-\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad \sigma_z |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle.$$

O operador $\sigma_x = \text{CP}$ troca partícula e antipartícula: $\sigma_x |\pm\rangle = |\mp\rangle$. O Hamiltoniano efetivo (não-hermitiano) é

$$H = M - \frac{i}{2}\Gamma,$$

com $M = M^\dagger$, $\Gamma = \Gamma^\dagger$ (positivo-definida) e a simetria fundamental (imposta por CP e inversão temporal combinados)

$$\sigma_x M = M \sigma_x, \quad \sigma_x \Gamma = \Gamma \sigma_x.$$

a) Ausência de σ_z na expansão; autovalores e autostados de H

Expandimos M e Γ na base de Pauli ($\sigma_0 = \mathbb{1}$):

$$M = m_0 \mathbb{1} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \Gamma = \gamma_0 \mathbb{1} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad m_0, \mathbf{m}, \gamma_0, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}.$$

A condição $\sigma_x M = M \sigma_x$ dá

$$\sigma_x (m_0 \mathbb{1} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sigma_x = m_0 \mathbb{1} + \mathbf{m} \cdot (\sigma_x \boldsymbol{\sigma} \sigma_x) = m_0 \mathbb{1} + m_x \sigma_x - m_y \sigma_y - m_z \sigma_z,$$

devido a $\sigma_x \sigma_x \sigma_x = \sigma_x$, $\sigma_x \sigma_y \sigma_x = -\sigma_y$, $\sigma_x \sigma_z \sigma_x = -\sigma_z$. Igualando a M obtemos $m_y = m_z = 0$. Analogamente, $\sigma_x \Gamma = \Gamma \sigma_x$ força $\gamma_y = \gamma_z = 0$. Logo

$$M = m_0 \mathbb{1} + m_x \sigma_x, \quad \Gamma = \gamma_0 \mathbb{1} + \gamma_x \sigma_x,$$

e o Hamiltoniano é

$$\boxed{H = h_0 \mathbb{1} + h_x \sigma_x}, \quad h_0 = m_0 - \frac{i}{2}\gamma_0, \quad h_x = m_x - \frac{i}{2}\gamma_x.$$

Note que *nenhum termo proporcional a σ_z (nem σ_y) aparece*.

Autovalores e autostados de H . Como H é diagonal na base própria de σ_x ,

$$\sigma_x |\pm_x\rangle = \pm |\pm_x\rangle, \quad |\pm_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle),$$

os autovalores são simplesmente os coeficientes da expansão:

$$\boxed{E_+ = h_0 + h_x = (m_0 + m_x) - \frac{i}{2}(\gamma_0 + \gamma_x), \quad E_- = h_0 - h_x = (m_0 - m_x) - \frac{i}{2}(\gamma_0 - \gamma_x)}.$$

Os autostados correspondentes são os autoestados de σ_x :

$$\boxed{|K_1^0\rangle = |+_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_2^0\rangle = |-_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)}.$$

Os autostados são ortogonais? Sim. Como σ_x é hermitiano, seus autoestados pertencentes a autovalores diferentes (+1 e -1) são ortogonais: $\langle +_x | -_x \rangle = 0$. Portanto $\langle K_1^0 | K_2^0 \rangle = 0$. $\square$

b) Invariança CP $\sigma_x M = M \sigma_x$, $\sigma_x \Gamma = \Gamma \sigma_x$ — **normalidade e autostados**

As condições CP aqui imposta são *idênticas* às da simetria fundamental do item (a) — a notação é a mesma. Portanto a expansão de H continua sendo $H = h_0 \mathbb{1} + h_x \sigma_x$ com σ_y, σ_z ausentes.

Normalidade de H . Um operador é normal se comuta com seu adjunto. Como $\mathbb{1}$ e σ_x são hermitianos,

$$H^\dagger = h_0^* \mathbb{1} + h_x^* \sigma_x, \quad [H, H^\dagger] = (h_0 h_x^* - h_0^* h_x) [\mathbb{1}, \sigma_x] = 0,$$

já que $[\mathbb{1}, \sigma_x] = 0$ e $\mathbb{1}$ comuta com tudo. Logo H é *normal* (e, em particular, diagonalizável por transformação unitária).

Autostados. Os autostados são os mesmos do item (a):

$$\boxed{|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)}.$$

Estes são também autoestados de CP com autovalores $+1$ e -1 respectivamente: $\sigma_x |K_1^0\rangle = +|K_1^0\rangle$ (CP-par) e $\sigma_x |K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle$ (CP-ímpar). $\square$

c) Probabilidade $P(K^0 \rightarrow K^0; t)$ partindo de $|K^0\rangle$ em $t = 0$

O estado inicial é

$$|\psi(0)\rangle = |K^0\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle).$$

A evolução temporal (o Hamiltoniano não é hermitiano, mas σ_x diagonaliza H , logo a evolução na base própria é simplesmente exponencial):

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-iE_+t} |K_1^0\rangle + e^{-iE_-t} |K_2^0\rangle \right).$$

Projetando de volta em $|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle)$,

$$\langle K^0 | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2} (e^{-iE_+t} + e^{-iE_-t}).$$

A probabilidade (o Hamiltoniano não-hermitiano significa que a norma total não é conservada; a probabilidade de encontrar ainda K^0 em t é o módulo ao quadrado da amplitude):

$$P(K^0 \rightarrow K^0; t) = |\langle K^0 | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} |e^{-iE_+t} + e^{-iE_-t}|^2.$$

Escrevendo $E_\pm = m_\pm - i\gamma_\pm/2$ com $m_\pm = m_0 \pm m_x$, $\gamma_\pm = \gamma_0 \pm \gamma_x$ (notar que $\gamma_\pm > 0$ pois $\Gamma > 0$ implica $\gamma_0 > |\gamma_x|$),

$$P(K^0 \rightarrow K^0; t) = \frac{1}{4} \left(e^{-\gamma_+t} + e^{-\gamma_-t} + 2 e^{-(\gamma_+ + \gamma_-)t/2} \cos((m_+ - m_-)t) \right).$$

Como $\gamma_0 \pm \gamma_x = \gamma_\pm$ e $m_+ - m_- = 2m_x$,

$$\boxed{P(K^0 \rightarrow K^0; t) = \frac{1}{4} \left(e^{-\gamma_+t} + e^{-\gamma_-t} + 2 e^{-\gamma_0t} \cos(2m_x t) \right)}.$$

Fisicamente, o termo oscilatório $\cos(2m_x t)$ reflete a massa-comum $\Delta m = 2m_x$ (diferença de massa entre K_1^0 e K_2^0); a envoltória exponencial é governada pelas taxas de decaimento $\gamma_\pm$. $\square$